

**WIRTSCHAFTSWISSENSCHAFTLICHES  
PRÜFUNGSSEKRETARIAT**

FAKULTÄT FÜR EMPIRISCHE HUMANWISSENSCHAFTEN UND WIRTSCHAFTSWISSENSCHAFT  
DER UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

**Von der/dem Studierenden auszufüllen** (Bitte leserlich und in Blockschrift):  
Schließende Statistik

**Name der Prüfung:** \_\_\_\_\_

**Semester, dem die  
Prüfung zugeordnet ist:**

WS 2017/18

(z. B. WS 2015/2016, SS 2016)

(Prüfungen im Februar/April = WS; Prüfungen im August/Oktobre = SS)

**Nachname, Vorname  
der/des Studierenden:** \_\_\_\_\_

**Matrikelnummer der/des  
Studierenden:** \_\_\_\_\_

**Erklärung**

Hiermit erkläre ich, dass mir die für diese Prüfung relevanten Zulassungsvoraussetzungen aus der für mich geltenden Prüfungsordnung bekannt sind.

Mir ist damit bewusst, dass diese Prüfungsleistung als nicht abgelegt zählt, wenn die hierfür vorgesehenen Zulassungsvoraussetzungen nicht erfüllt sind.

Mir ist bekannt, dass die Teilnahme an der Prüfung zudem die ordnungsgemäße Anmeldung zur Prüfung voraussetzt. Die Teilnahme bei versäumter Anmeldung hat die Ungültigkeit der Prüfung zur Folge.

Zudem ist mir bekannt, dass eine nicht bestandene Prüfung zweimal wiederholt werden kann. Die Wiederholung einer bestandenen Prüfung ist nicht zulässig.

**Datum:** \_\_\_\_\_

**Unterschrift der/des Studierenden:** \_\_\_\_\_

**Von der Prüferin/Vom Prüfer auszufüllen:**

Aufgabe	Punkte	Max. Punkte	Bemerkungen
1		16	
2		12	
3		8	
4		10	
5		15	
6		18	
7		15	
8		5	
9		21	
Summe		120	

*bestanden*

Note: \_\_\_\_\_

*nicht bestanden*

Unterschrift der Prüferin/des Prüfers: \_\_\_\_\_

KLAUSURHEFT ZUR  
 BACHELOR-PRÜFUNG  
 SCHLIESSENDE STATISTIK  
 WINTERSEMESTER 2017/18

Dr. Martin Becker

Hinweise für die Klausurteilnehmer

- Die Klausur besteht aus insgesamt 9 Aufgaben. Prüfen Sie die Vollständigkeit Ihres Exemplares nach; spätere Reklamationen können nicht berücksichtigt werden.
- Es sind insgesamt 120 Punkte (= 16 + 12 + 8 + 10 + 15 + 18 + 15 + 5 + 21) erreichbar.
- Als Hilfsmittel sind zugelassen: Taschenrechner (auch mit Grafikfähigkeit), 2 selbsterstellte DIN-A4 Blätter bzw. 4 selbsterstellte (einseitige) DIN-A4 Seiten. Benötigte Tabellen zur Normal- und  $t$ -Verteilung finden Sie am Ende dieses Klausurheftes.
- Bei der Korrektur werden **nur** die Lösungen auf den Seiten 1–24 berücksichtigt. Das letzte Blatt (Tabellen zur Normal- und  $t$ -Verteilung) darf abgetrennt werden.
- Bei mehreren Lösungsvorschlägen muss die gültige Lösung eindeutig gekennzeichnet sein.
- Mit Ausnahme der Multiple-Choice-Aufgaben muss der Lösungsweg klar ersichtlich sein.

<b>Bewertungsteil — Bitte nicht beschreiben</b>						
Aufgabe	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	$\Sigma$
1		■	■	■	■	
2		■	■	■	■	
3				■	■	
4				■	■	
5					■	
6			■	■	■	
7				■	■	
8						
9						
$\Sigma$						

**Aufgabe 1** (16 Punkte)

Markieren Sie jeweils mit einem Kreuz pro Aussage im betreffenden Kästchen, ob die unten stehenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Richtige Antworten geben 2 Punkte, falsche Antworten und nicht bearbeitete Aussagen 0 Punkte (Aussagen mit zwei Kreuzen zählen als nicht bearbeitet!).

- |  | wahr                     | falsch                   |
|--|--------------------------|--------------------------|
| 1. Sei $X_1, \dots, X_n$ eine einfache Stichprobe vom Umfang $n$ zu $Y$ . Dann sind $X_1, \dots, X_n$ stochastisch unabhängig und die Verteilung aller $X_i$ stimmt mit der Verteilung von $Y$ überein.  | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 2. Gilt für eine Familie $\hat{\theta}_n, n \in \mathbb{N}$ , von Schätzfunktionen für einen Parameter $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}$ unabhängig von $\theta$ sowohl $E(\hat{\theta}_n) = \theta$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ als auch $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(\hat{\theta}_n) = 0$ , dann ist die Familie $\hat{\theta}_n$ konsistent im quadratischen Mittel für $\theta$ . | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 3. Konfidenzintervalle für den Erwartungswert bei unbekannter Varianz sind umso breiter, je größer die geschätzte (Stichproben-) Varianz ist.  | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 4. Statistische Hypothesentests sind typischerweise so konstruiert, dass die Teststatistik bei Gültigkeit der Nullhypothese mit einer größeren Wahrscheinlichkeit im kritischen Bereich liegt als bei Verletzung der Nullhypothese.  | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 5. Das Verkleinern des Signifikanzniveaus führt bei Anwendung des zweiseitigen $t$ -Tests für den Erwartungswert bei unbekannter Varianz stets zu einer Verkleinerung des kritischen Bereichs.   | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 6. Mit Hilfe von Gütefunktionswerten kann man in Abhängigkeit der wahren Verteilungsparameter sowohl die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler als auch die Wahrscheinlichkeit für eine korrekte Entscheidung leicht berechnen. Für feste Verteilungsparameter addieren sich diese beiden Wahrscheinlichkeiten stets zu 1.   | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 7. Mit der einfachen Varianzanalyse können mehrere mit übereinstimmender Varianz normalverteilte Grundgesamtheiten daraufhin untersucht werden, ob ihre Erwartungswerte (ebenfalls) übereinstimmen.  | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 8. Im einfachen linearen Regressionsmodell   | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 \cdot x_i + u_i, \quad u_i \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0, \sigma^2),$$

sind die Kleinst-Quadrate-Schätzfunktionen  $\hat{\beta}_1$  und  $\hat{\beta}_2$  stets stochastisch unabhängig.

**Aufgabe 2** (12 Punkte)

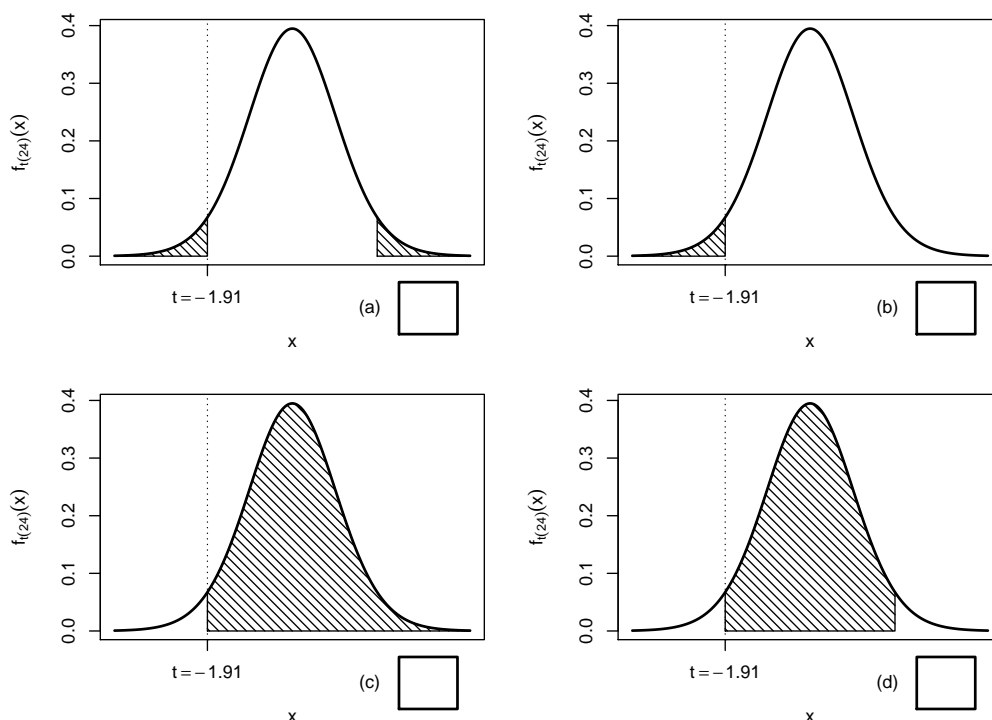
Markieren Sie jeweils die korrekte Antwort mit einem Kreuz im betreffenden Kästchen. Es ist jeweils genau ein Kreuz korrekt.

Richtige Antworten geben 3 Punkte, falsche Antworten und nicht bearbeitete Aufgabenteile 0 Punkte (Aufgabenteile mit mehr als einem Kreuz zählen als nicht bearbeitet!).

1. Sei  $X_1, \dots, X_{25}$  eine einfache Stichprobe zu einer  $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilten Zufallsvariablen  $Y$  mit unbekanntem Parametern  $\mu$  und  $\sigma^2$ . Auf der Grundlage einer Stichprobenrealisation zu dieser einfachen Stichprobe vom Umfang  $n = 25$  soll

$$H_0 : \mu = \mu_0 = 25 \quad \text{gegen} \quad H_1 : \mu \neq \mu_0 = 25$$

mit einem  $t$ -Test getestet werden. Als realisierte Teststatistik erhält man  $t = -1.91$ . Markieren Sie die Abbildung, welche den  $p$ -Wert in der beschriebenen Situation korrekt als Inhalt der schraffierten Fläche unter der Dichtefunktion der Verteilung der Teststatistik unter  $H_0$  (für  $\mu = \mu_0$ ) darstellt.



2. Auf Grundlage zweier unabhängiger einfacher Stichproben  $X_1^A, \dots, X_{n_A}^A$  vom Umfang  $n_A$  zu  $Y^A$  und  $X_1^B, \dots, X_{n_B}^B$  vom Umfang  $n_B$  zu  $Y^B$  soll unter der Annahme, dass  $Y^A$  und  $Y^B$  jeweils normalverteilt sind mit unbekannter, aber übereinstimmender Varianz, mit einem Signifikanztest überprüft werden, ob  $E(Y^A) < E(Y^B)$  gilt. Zur Untersuchung dieser Fragestellung sind die folgenden aus der Vorlesung bekannten Verfahren geeignet:

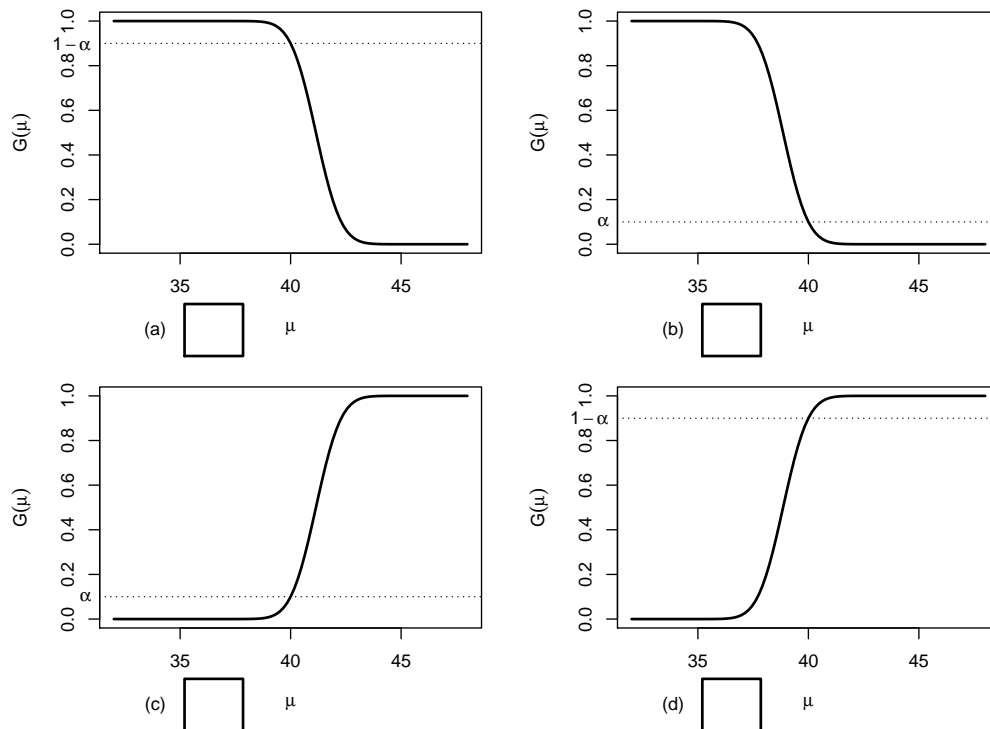
- (a) Nur die Varianzanalyse
- (b) Nur der 2-Stichproben- $t$ -Test für den Mittelwert
- (c) Nur der  $t$ -Differenztest für verbundene Stichproben
- (d) Die Varianzanalyse und (äquivalent) der 2-Stichproben- $t$ -Test für den Mittelwert

3. Auf der Grundlage einer einfachen Stichprobe  $X_1, \dots, X_{20}$  vom Umfang  $n = 20$  zu einer  $N(\mu, 4^2)$ -verteilten Zufallsvariablen wird ein Gauß-Test zur Überprüfung der Hypothesen

$$H_0 : \mu \geq 40 \quad \text{gegen} \quad H_1 : \mu < 40$$

bei einem Signifikanzniveau von  $\alpha = 0.1$  betrachtet.

Markieren Sie die Abbildung, welche die Gütefunktion des oben genannten Tests korrekt darstellt.



4. Bei der Durchführung eines rechtsseitigen Gauß-Tests für den Mittelwert einer normalverteilten Grundgesamtheit bei bekannter Varianz (mit  $H_0 : \mu \leq \mu_0$  gegen  $H_1 : \mu > \mu_0$ ) wird die Nullhypothese zum Signifikanzniveau  $\alpha = 0.05$  abgelehnt. Dann gilt für die Testentscheidungen des linksseitigen (mit  $H_0 : \mu \geq \mu_0$  gegen  $H_1 : \mu < \mu_0$ ) und zweiseitigen (mit  $H_0 : \mu = \mu_0$  gegen  $H_1 : \mu \neq \mu_0$ ) Tests (bei unverändertem Signifikanzniveau  $\alpha = 0.05$ ):

- (a) Der linksseitige Test lehnt  $H_0$  nicht ab, der zweiseitige Test lehnt  $H_0$  ab.
- (b) Der linksseitige Test lehnt  $H_0$  ab, der zweiseitige Test lehnt  $H_0$  nicht ab.
- (c) Der linksseitige Test lehnt  $H_0$  nicht ab, die Entscheidung des zweiseitigen Tests kann für oder gegen  $H_0$  ausfallen.
- (d) Der linksseitige Test lehnt  $H_0$  ab, die Entscheidung des zweiseitigen Tests kann für oder gegen  $H_0$  ausfallen.

**Aufgabe 3** (2 + 3 + 3 = 8 Punkte)

Zu  $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$  liegen die unabhängigen einfachen Stichproben  $X_1^A, \dots, X_{30}^A$  vom Umfang 30 und  $X_1^B, \dots, X_{10}^B$  vom Umfang 10 vor. Mit  $\overline{X^A} := \frac{1}{30} \sum_{i=1}^{30} X_i^A$  und  $\overline{X^B} := \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} X_i^B$  werden die Schätzfunktionen

- $\hat{\mu}_1 = \frac{1}{4} \cdot \overline{X^A} + \frac{1}{4} \cdot \overline{X^B}$ ,
- $\hat{\mu}_2 = \frac{1}{4} \cdot \overline{X^A} + \frac{3}{4} \cdot \overline{X^B}$  und
- $\hat{\mu}_3 = \frac{3}{4} \cdot \overline{X^A} + \frac{1}{4} \cdot \overline{X^B}$

zur Schätzung von  $\mu$  betrachtet.

- (a) Wie sind  $\overline{X^A}$  und  $\overline{X^B}$  verteilt?
- (b) Welche der Schätzfunktionen  $\hat{\mu}_1$ ,  $\hat{\mu}_2$  und  $\hat{\mu}_3$  sind erwartungstreu für  $\mu$ ? Begründen Sie Ihre Antwort.
- (c) Berechnen Sie zu den für  $\mu$  erwartungstreuen Schätzfunktionen die zugehörige Varianz. Welche dieser Schätzfunktionen würden Sie am ehesten zur Schätzung von  $\mu$  einsetzen? Begründen Sie Ihre Antwort.



**Aufgabe 4** (6 + 3 + 1 = 10 Punkte)

Die Verteilung einer Zufallsvariablen  $Y$  sei in Abhängigkeit des unbekanntes Parameters  $a > 0$  durch die folgende Dichtefunktion gegeben:

$$f_Y(y|a) = \begin{cases} \frac{3 \cdot a^3}{y^4} & \text{für } y \geq a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Der Parameter  $a$  soll auf Grundlage einer einfachen Stichprobe  $X_1, \dots, X_n$  vom Umfang  $n$  geschätzt werden.

- (a) Bestimmen Sie den Schätzer  $\hat{a}_{ML}$  nach der Maximum-Likelihood-Methode.
- (b) Zeigen Sie, dass  $E(Y) = \frac{3}{2} \cdot a$  gilt.
- (c) Bestimmen Sie den Schätzer  $\hat{a}_{MM}$  nach der Methode der Momente.

*Hinweise:*

- Beachten Sie, dass Sie Teil (b) auch ohne die Bearbeitung von Teil (a) und Teil (c) ohne die Bearbeitung der Teile (a) und (b) lösen können.
- Falls sich der ML-Schätzer als lokale Extremstelle einer differenzierbaren Funktion bestimmen lässt, muss **nicht** überprüft werden (z.B. mit Hilfe der 2. Ableitung), ob tatsächlich eine Maximalstelle vorliegt.





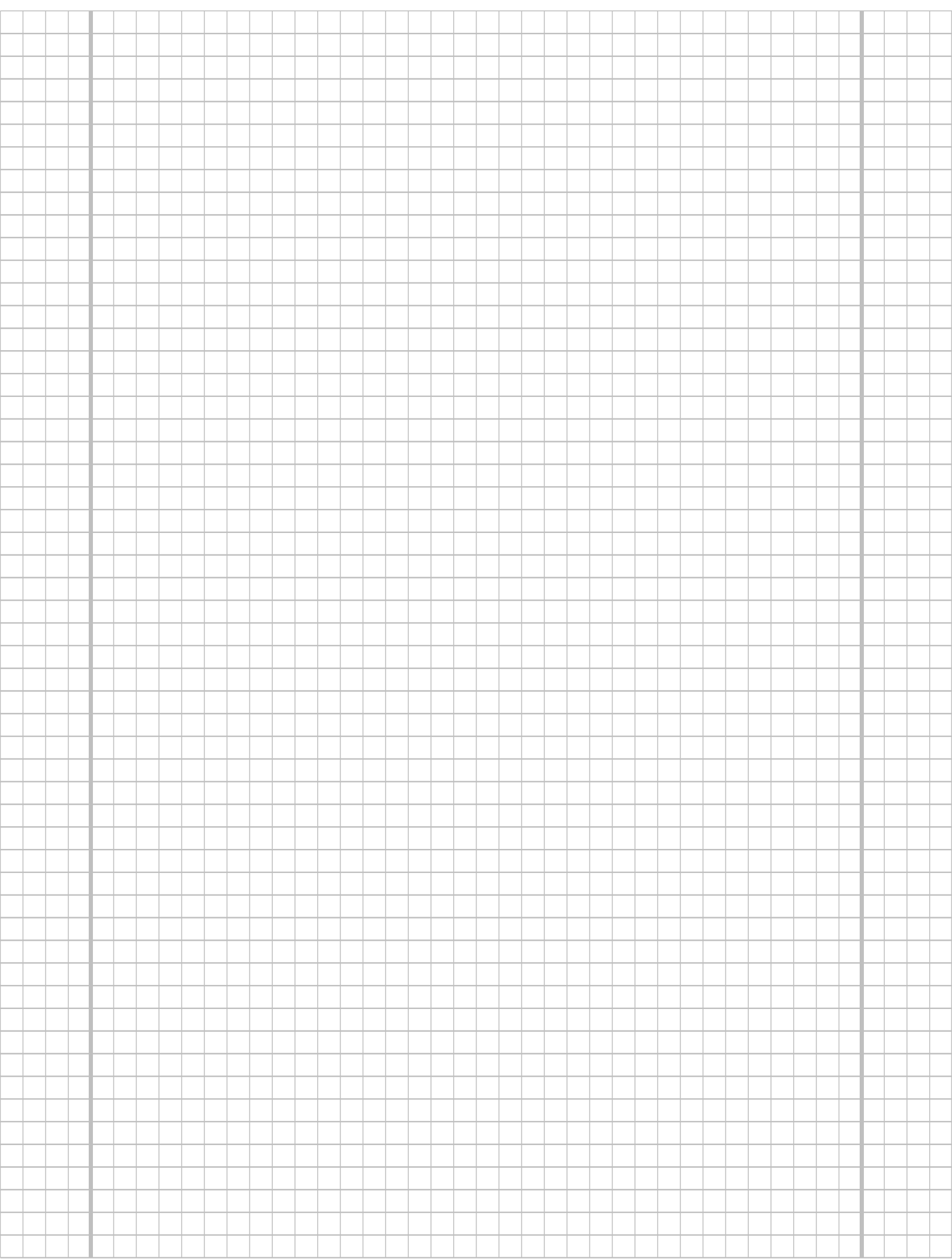
**Aufgabe 5** (3 + 7 + 2 + 3 = 15 Punkte)

Bei der Abfüllung von Nasenspray weiß der Hersteller aus Erfahrung, dass die verwendete Maschine eine Standardabweichung von  $0.15[ml]$  für die abgefüllte Menge hat. Nach einer Inventur hat der Hersteller den Verdacht, dass die Abfüllanlage im Mittel weniger als die auf dem Produkt ausgezeichneten  $10[ml]$  in die Sprühflaschen einfüllt. Dies soll mit einem statistischen Test überprüft werden. Hierzu werden der Produktion 9 Sprühflaschen entnommen, deren gemessene Füllmengen  $x_1, \dots, x_9$  als Realisation einer einfachen Stichprobe vom Umfang 9 zur annahmegemäß  $N(\mu, 0.15^2[ml^2])$ -verteilten Abfüllmenge betrachtet werden können. Als Stichprobenmittelwert ergibt sich dabei

$$\bar{x} = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 x_i = 9.875[ml] .$$

- (a) Geben Sie auf Basis der Stichprobenrealisation ein zweiseitiges Konfidenzintervall für die mittlere Abfüllmenge zur Sicherheitswahrscheinlichkeit  $1 - \alpha = 0.99(!)$  an.
- (b) Testen Sie zum Signifikanzniveau  $\alpha = 0.05$ , ob der Verdacht der Herstellerfirma bestätigt werden kann. Fassen Sie das Ergebnis des Tests in einem Antwortsatz zusammen.
- (c) Berechnen Sie den  $p$ -Wert zum Test aus Teil (b). Wie wäre die Entscheidung zum Test aus Teil (b) bei einem Signifikanzniveau von  $\alpha = 0.01$  ausgefallen?
- (d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei der Ziehung einer Stichprobe und der anschließenden Durchführung des Tests aus Teil (b) eine Testentscheidung zu Gunsten der Gegenhypothese zu erhalten, falls die tatsächliche mittlere Abfüllmenge  $10.05[ml]$  beträgt?







**Aufgabe 6** (10 + 8 = 18 Punkte)

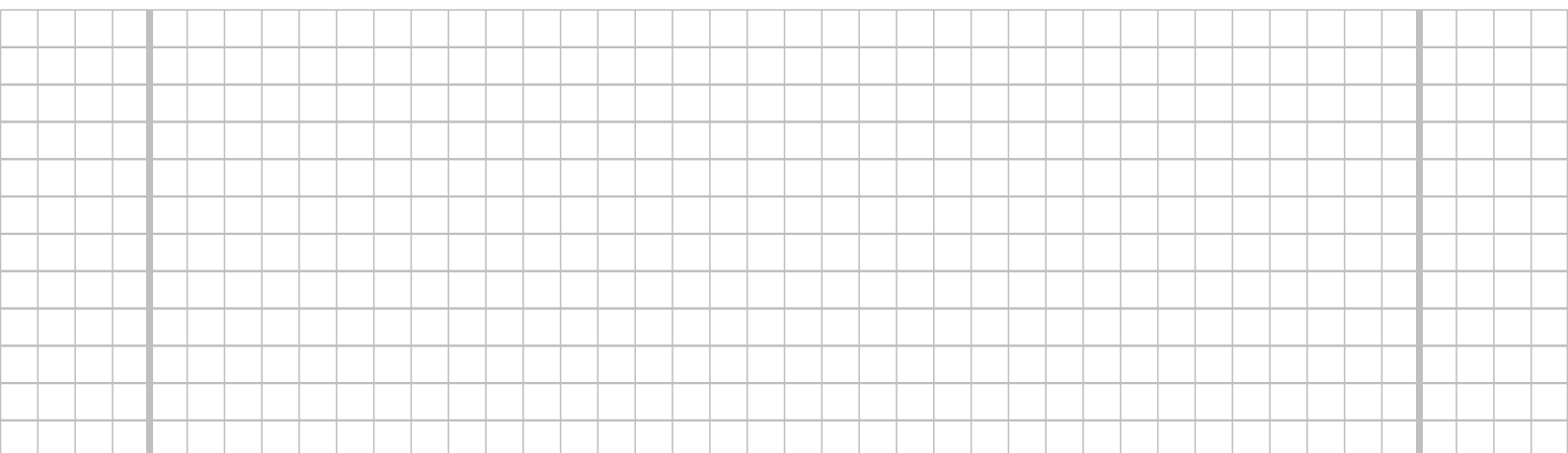
Es werde angenommen, dass die (in mAh bei festem Entladestrom gemessene) Kapazität  $Y^A$  des aktuell von einem Taschenlampenhersteller verwendeten Lithium-Ionen-Akkutyps normalverteilt sei mit unbekanntem Erwartungswert  $\mu_A$  und unbekannter Varianz  $\sigma_A^2$ . Der Taschenlampenhersteller erwägt, seine Taschenlampen zukünftig mit einem alternativen Lithium-Ionen-Akkutyp auszuliefern, dessen Kapazität  $Y^B$  ebenfalls als normalverteilt (mit unbekanntem Erwartungswert  $\mu_B$  und unbekannter Varianz  $\sigma_B^2$ ) angenommen werden kann. Es soll überprüft werden, ob der alternative Akkutyp im Mittel eine höhere Kapazität als der aktuell verwendete Typ besitzt.

Aus einer Kapazitätsmessung mit  $n_A = 8$  Exemplaren des aktuell verwendeten Akkutyps und  $n_B = 10$  Exemplaren des alternativen Akkutyps erhielt man Realisationen jeweils voneinander unabhängiger einfacher Stichproben  $X_1^A, \dots, X_8^A$  zu  $Y^A$  sowie  $X_1^B, \dots, X_{10}^B$  zu  $Y^B$  und hieraus die zugehörigen Mittelwerte  $\bar{x}^A = 2984$  bzw.  $\bar{x}^B = 3134$  sowie die Stichprobenstandardabweichungen  $s_{Y^A} = 117$  bzw.  $s_{Y^B} = 106$ .

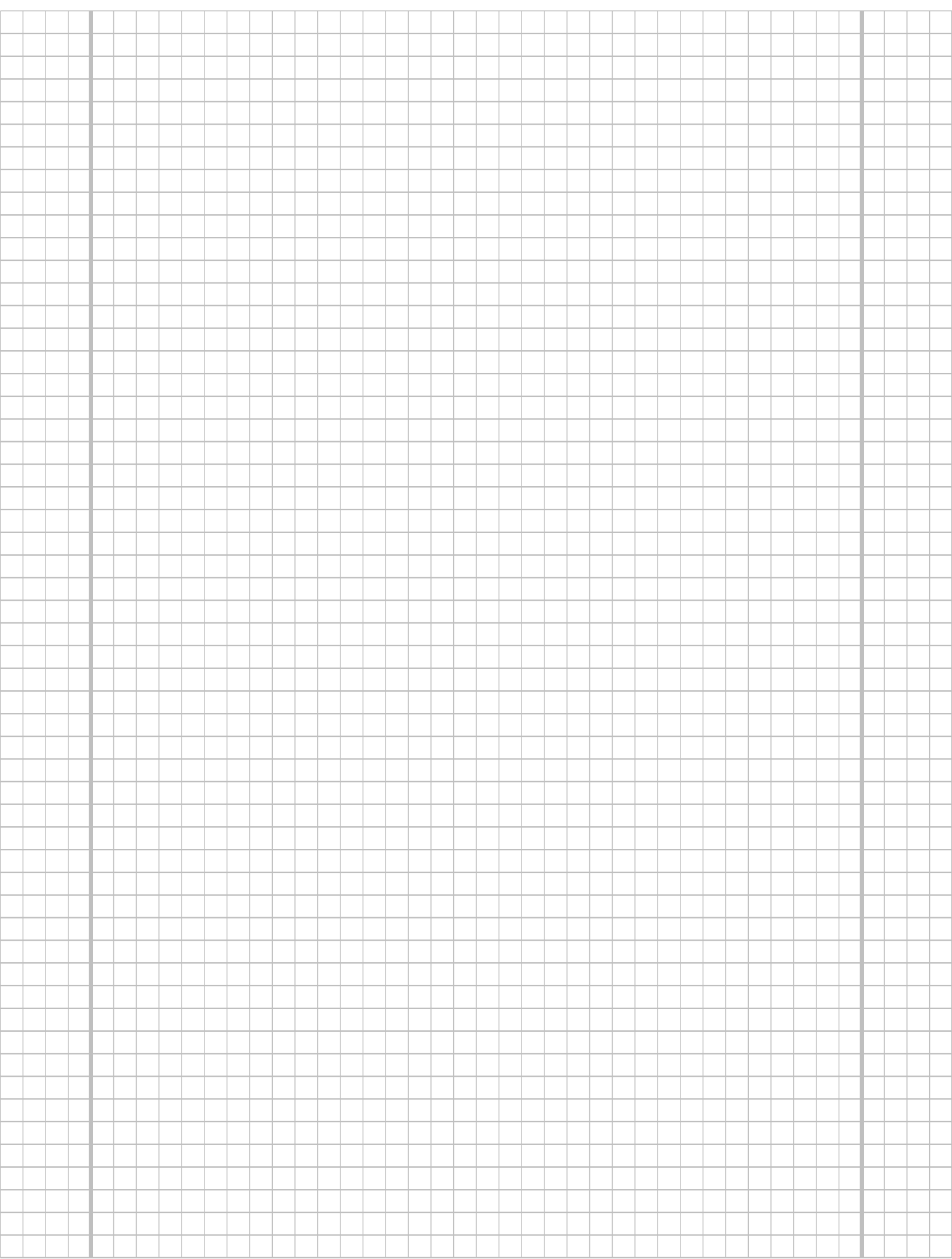
- (a) Testen Sie unter der Annahme  $\sigma_A^2 = \sigma_B^2$  zum Signifikanzniveau  $\alpha = 0.05$  die Hypothese, dass der alternative Akkutyp im Mittel eine höhere Kapazität als der aktuell verwendete Typ besitzt. Fassen Sie das Ergebnis des Tests in einem Antwortsatz zusammen.
- (b) Überprüfen Sie mit einem geeigneten Test zum Signifikanzniveau  $\alpha = 0.10$ , ob die in Teil (a) getroffene Annahme der Varianzgleichheit auf Grundlage der vorhandenen Stichprobeninformation verworfen werden muss. Fassen Sie das Ergebnis des Tests in einem Antwortsatz zusammen.

*Hinweis: Verwenden Sie für Teil (b) den folgenden Tabellenausschnitt mit 0.95-Quantilen von  $F(m, n)$ -Verteilungen sowie ggf. die Rechenregel  $F_{m,n;p} = \frac{1}{F_{n,m;1-p}}$ .*

$n \setminus m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	161.448	199.500	215.707	224.583	230.162	233.986	236.768	238.883	240.543	241.882
2	18.513	19.000	19.164	19.247	19.296	19.330	19.353	19.371	19.385	19.396
3	10.128	9.552	9.277	9.117	9.013	8.941	8.887	8.845	8.812	8.786
4	7.709	6.944	6.591	6.388	6.256	6.163	6.094	6.041	5.999	5.964
5	6.608	5.786	5.409	5.192	5.050	4.950	4.876	4.818	4.772	4.735
6	5.987	5.143	4.757	4.534	4.387	4.284	4.207	4.147	4.099	4.060
7	5.591	4.737	4.347	4.120	3.972	3.866	3.787	3.726	3.677	3.637
8	5.318	4.459	4.066	3.838	3.687	3.581	3.500	3.438	3.388	3.347
9	5.117	4.256	3.863	3.633	3.482	3.374	3.293	3.230	3.179	3.137
10	4.965	4.103	3.708	3.478	3.326	3.217	3.135	3.072	3.020	2.978











**Aufgabe 7** (10 + 3 + 2 = 15 Punkte)

In einer bestimmten Multiple-Choice-Aufgabe ist genau eine von vier Antwortmöglichkeiten, die mit „A“, „B“, „C“ bzw. „D“ bezeichnet sind, korrekt. Bei der Korrektur der Klausur stellt der Dozent fest, dass die von den Teilnehmern der Klausur abgegebenen Antworten wie folgt verteilt sind:

Antwort	A	B	C	D
Anteil in Prozent	20	30	18	32

Der Dozent fragt sich, ob man bei dieser Verteilung der abgegebenen Antworten davon ausgehen kann, dass sich die Teilnehmer der Klausur rein zufällig (und voneinander unabhängig) für eine der vier Antworten entschieden haben.

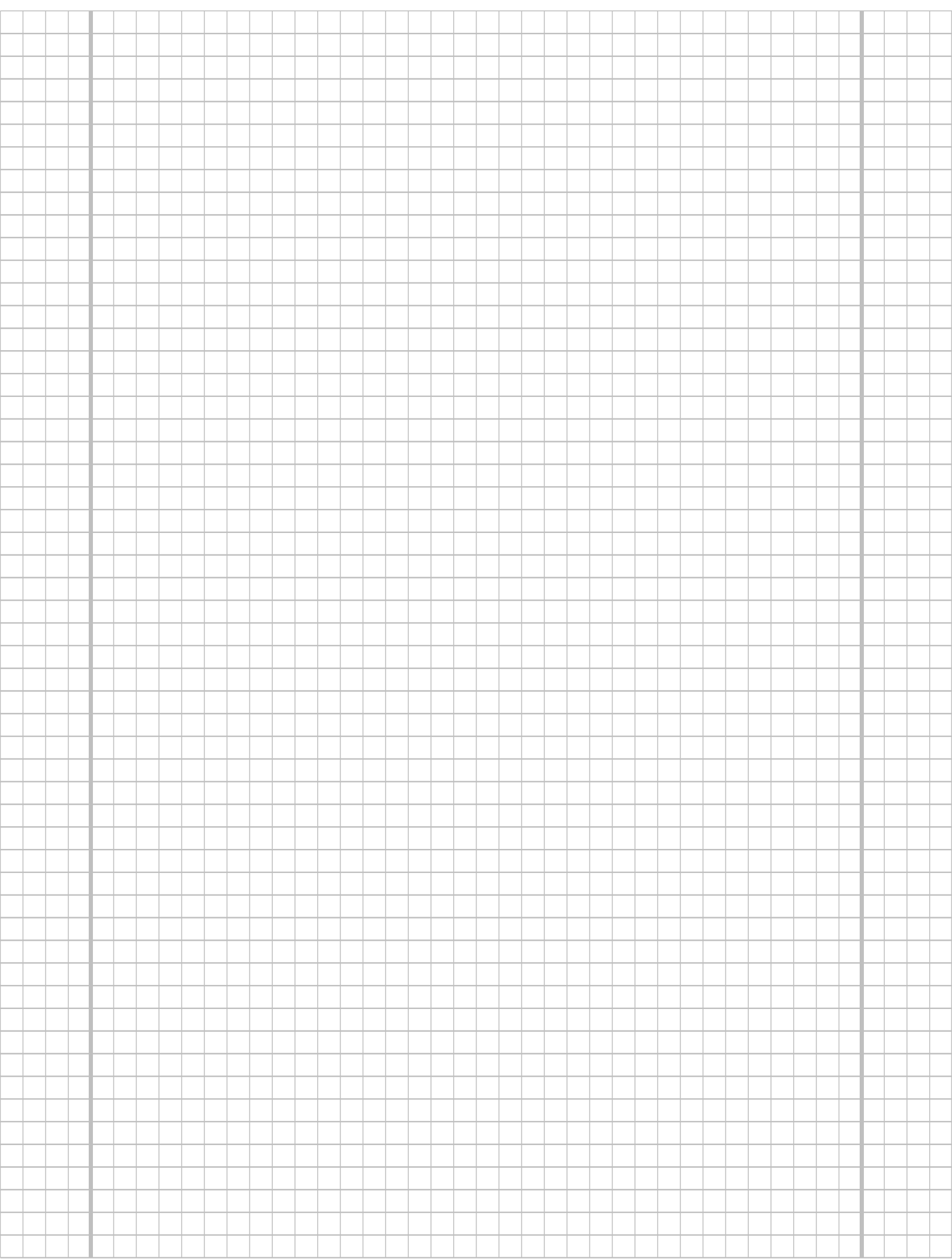
- Gehen Sie zunächst davon aus, dass 300 Studierende an der Klausur teilgenommen (und die Aufgabe bearbeitet) haben. Überprüfen Sie unter der Annahme, dass sich die abgegebenen Antworten als einfache Stichprobe auffassen lassen, mit einem geeigneten statistischen Test, ob sich die Prüflinge rein zufällig für eine der vier Antworten entschieden haben oder nicht (Signifikanzniveau  $\alpha = 0.01$  (!)).
- Würde sich das Ergebnis des Tests aus Teil (a) ändern, wenn nur 150 Prüflinge an der Klausur teilgenommen (und die Aufgabe bearbeitet) hätten? Begründen Sie Ihre Antwort! (*Beachten Sie, dass Sie den Test nicht komplett neu durchführen müssen und insbesondere die realisierte Teststatistik relativ leicht aus dem Ergebnis des vorherigen Aufgabenteils gewinnen können!*)
- Ab welcher Anzahl von Klausurteilnehmern würde eine Durchführung des bereits in den Teilen (a) und (b) verwendeten Tests dazu führen, davon auszugehen, dass sich die Prüflinge *nicht* rein zufällig für eine der vier Antwortmöglichkeiten entschieden haben?

*Hinweis: Verwenden Sie den folgenden Tabellenausschnitt mit p-Quantilen von  $\chi^2(n)$ -Verteilungen:*

$n \setminus p$	0.01	0.025	0.05	0.50	0.90	0.95	0.975	0.99
1	0.000	0.001	0.004	0.455	2.706	3.841	5.024	6.635
2	0.020	0.051	0.103	1.386	4.605	5.991	7.378	9.210
3	0.115	0.216	0.352	2.366	6.251	7.815	9.348	11.345
4	0.297	0.484	0.711	3.357	7.779	9.488	11.143	13.277
5	0.554	0.831	1.145	4.351	9.236	11.070	12.833	15.086









**Aufgabe 8** (1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5 Punkte)

Zur Erklärung des Erdgaspreises je Mio. BTU  $y_i$  (in US-Dollar) durch den Erdölpreis je Barrel  $x_i$  (in US-Dollar) unterstellt man die Gültigkeit eines Zusammenhangs im Sinne des folgenden linearen Modells:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + u_i \quad \text{mit} \quad u_i \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0, \sigma^2), \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

Aus vorliegenden Daten zu den Jahren 2010–2016 wurde das lineare Modell mit der Statistik-Software R wie folgt geschätzt:

Call:

```
lm(formula = y ~ x)
```

Residuals:

1	2	3	4	5	6	7
-0.2309	-0.7273	0.1330	0.7239	-0.1521	1.1144	-0.8609

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	1.58394	1.02301	1.548	0.182227
x	0.08710	0.01129	7.718	0.000583 ***

---

Signif. codes: 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.7912 on 5 degrees of freedom

Multiple R-squared: 0.9226, Adjusted R-squared: 0.9071

F-statistic: 59.56 on 1 and 5 DF, p-value: 0.0005831

- Geben Sie die realisierten Kleinst-Quadrate-Schätzwerte für  $\beta_1$  und  $\beta_2$  an.
- Geben Sie den realisierten Schätzwert für  $\sigma^2$  an.
- Entscheiden Sie mit Hilfe des zugehörigen  $p$ -Werts zum Signifikanzniveau  $\alpha = 0.10$ , ob  $\beta_1$  signifikant positiv ist.
- Entscheiden Sie mit Hilfe des zugehörigen  $p$ -Werts zum Signifikanzniveau  $\alpha = 0.001$ , ob  $\beta_2$  signifikant von Null verschieden ist.
- Welchen Erdgaspreis je Mio. BTU (in US-Dollar) prognostiziert das Modell für ein Jahr mit einem Erdölpreis je Barrel von 70 (in US-Dollar)?



**Aufgabe 9** (6 + 2 + 3 + 5 + 5 = 21 Punkte)

Zur Schätzung eines einfachen linearen Regressionsmodells

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 \cdot x_i + u_i \quad \text{mit} \quad u_i \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0, \sigma^2), \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

aus einer Stichprobe vom Umfang  $n = 20$  wurden bereits die folgenden Zwischenwerte errechnet:

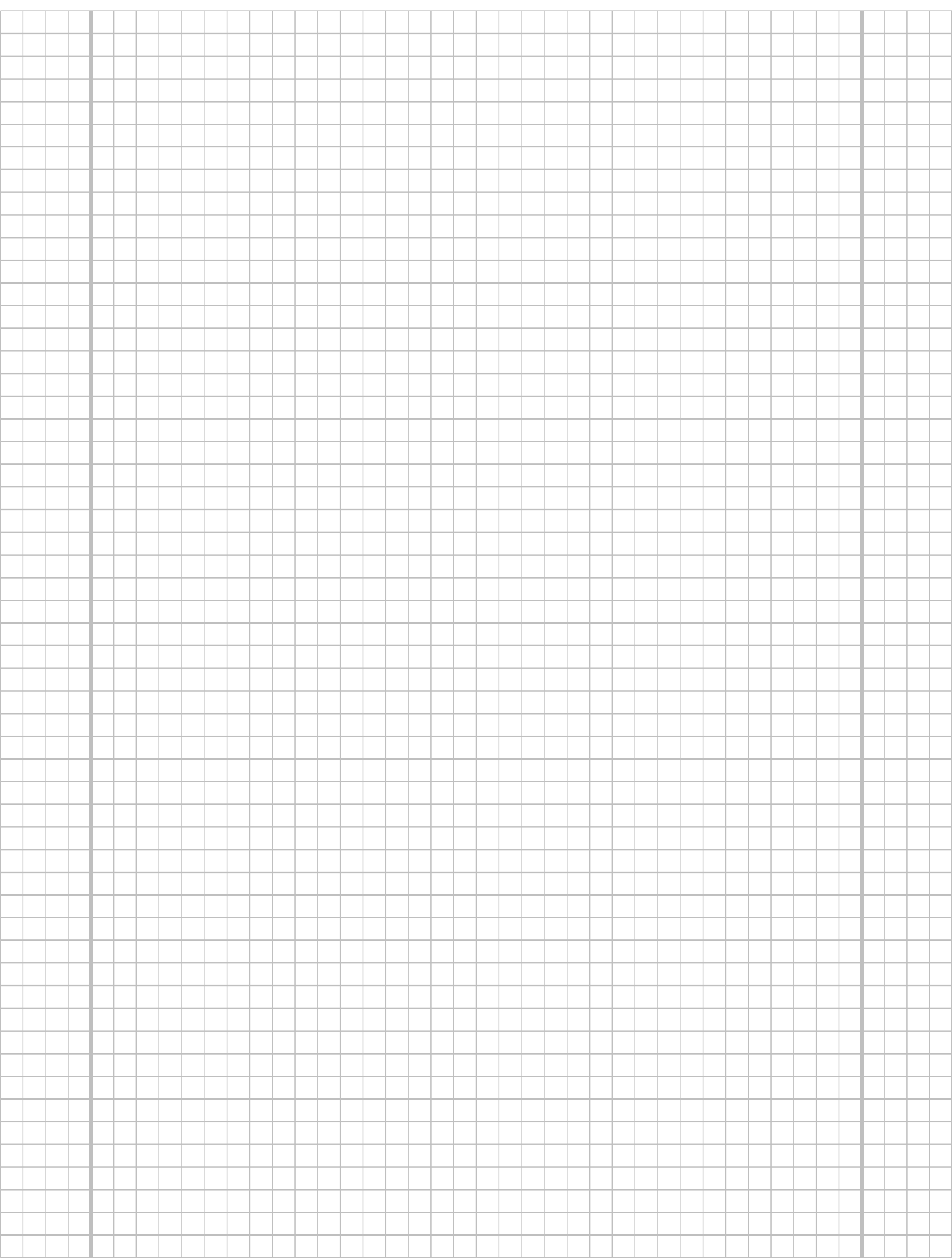
$$\sum_{i=1}^{20} y_i = 339.593; \quad \sum_{i=1}^{20} y_i^2 = 5903.002; \quad \sum_{i=1}^{20} x_i = 93.608;$$

$$\sum_{i=1}^{20} x_i^2 = 481.297; \quad \sum_{i=1}^{20} x_i \cdot y_i = 1632.131$$

- (a) Schätzen Sie  $\beta_1$  und  $\beta_2$  mit Hilfe der Kleinst-Quadrate-Methode.
- (b) Geben Sie mit Hilfe der bekannten erwartungstreuen Schätzfunktion für  $\sigma^2$  den realisierten Schätzwert für  $\sigma^2$  an.
- (c) Berechnen Sie  $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}^2$  und  $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_2}^2$ .
- (d) Überprüfen Sie zum Signifikanzniveau  $\alpha = 0.01$  (!), ob  $\beta_2$  signifikant positiv ist. Fassen Sie das Ergebnis auch in einem Antwortsatz zusammen.
- (e) Geben Sie ein Prognoseintervall zur Vertrauenswahrscheinlichkeit  $1 - \alpha = 0.90$  für  $y_0$  gegeben  $x_0 = 5$  an.







### Tabelle zur Standardnormalverteilung

$$F_{N(0,1)}(x) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

$$\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$$

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

### *p*-Quantile der Standardnormalverteilung

$$F_{N(0,1)}(N_p) = p$$

<i>p</i>	0.85	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.9995
<i>N<sub>p</sub></i>	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.291

**$p$ -Quantile der  $t(n)$ -Verteilungen  $t_{n;p}$**

$$T \sim t(n) \quad \Rightarrow \quad F_T(t_{n;p}) = p$$

$n \backslash p$	0.85	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.9995
1	1.963	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	636.619
2	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	31.599
3	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	12.924
4	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	8.610
5	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	6.869
6	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.959
7	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	5.408
8	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	5.041
9	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.781
10	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.587
11	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.437
12	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	4.318
13	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	4.221
14	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	4.140
15	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	4.073
16	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	4.015
17	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.965
18	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.922
19	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.883
20	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.850
21	1.063	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.819
22	1.061	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.792
23	1.060	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.768
24	1.059	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.745
25	1.058	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.725
26	1.058	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.707
27	1.057	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.690
28	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.674
29	1.055	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.659
30	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.646
31	1.054	1.309	1.696	2.040	2.453	2.744	3.633
32	1.054	1.309	1.694	2.037	2.449	2.738	3.622
33	1.053	1.308	1.692	2.035	2.445	2.733	3.611
34	1.052	1.307	1.691	2.032	2.441	2.728	3.601
35	1.052	1.306	1.690	2.030	2.438	2.724	3.591
40	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.551
60	1.045	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.460
80	1.043	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	3.416
100	1.042	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	3.390
120	1.041	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.373
140	1.040	1.288	1.656	1.977	2.353	2.611	3.361
160	1.040	1.287	1.654	1.975	2.350	2.607	3.352
180	1.039	1.286	1.653	1.973	2.347	2.603	3.345
200	1.039	1.286	1.653	1.972	2.345	2.601	3.340
250	1.039	1.285	1.651	1.969	2.341	2.596	3.330