

**WIRTSCHAFTSWISSENSCHAFTLICHES  
PRÜFUNGSSEKRETARIAT**

FAKULTÄT FÜR EMPIRISCHE HUMANWISSENSCHAFTEN UND WIRTSCHAFTSWISSENSCHAFT  
DER UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

**Von der/dem Studierenden auszufüllen** (Bitte leserlich und in Blockschrift):

**Name der Prüfung:** Schließende Statistik  
**Semester, dem die Prüfung zugeordnet ist:** SS 2022 (z. B. WS 2019/2020, SS 2020)  
(Prüfungen im Februar/April = WS; Prüfungen im August/Oktobre = SS)  
**Nachname, Vorname der/des Studierenden:** \_\_\_\_\_  
**Matrikelnummer der/des Studierenden:** \_\_\_\_\_

**Erklärung**

Hiermit erkläre ich, dass mir die für diese Prüfung relevanten Zulassungsvoraussetzungen aus der für mich geltenden Prüfungsordnung bekannt sind.

Mir ist damit bewusst, dass diese Prüfungsleistung als nicht abgelegt zählt, wenn die hierfür vorgesehenen Zulassungsvoraussetzungen nicht erfüllt sind.

Mir ist bekannt, dass die Teilnahme an der Prüfung zudem die ordnungsgemäße Anmeldung zur Prüfung voraussetzt. Die Teilnahme bei versäumter Anmeldung hat die Ungültigkeit der Prüfung zur Folge.

Zudem ist mir bekannt, dass eine nicht bestandene Prüfung zweimal wiederholt werden kann. Die Wiederholung einer bestandenen Prüfung ist nicht zulässig.

**Datum:** \_\_\_\_\_ **Unterschrift der/des Studierenden:** \_\_\_\_\_

**Von der Prüferin/Vom Prüfer auszufüllen:**

Aufgabe	Punkte	Max. Punkte	Bemerkungen
1		16	
2		12	
3		6	
4		10	
5		19	
6		18	
7		12	
8		6	
9		21	
<i>Summe</i>		120	

*bestanden* Note: \_\_\_\_\_

*nicht bestanden* Unterschrift der Prüferin/des Prüfers: \_\_\_\_\_

KLAUSURHEFT ZUR  
 BACHELOR-PRÜFUNG  
 SCHLIESSENDE STATISTIK  
 SOMMERSEMESTER 2022

PD Dr. Martin Becker

Hinweise für die Klausurteilnehmer

- Die Klausur besteht aus insgesamt 9 Aufgaben. Prüfen Sie die Vollständigkeit Ihres Exemplares nach; spätere Reklamationen können nicht berücksichtigt werden.
- Es sind insgesamt 120 Punkte (= 16 + 12 + 6 + 10 + 19 + 18 + 12 + 6 + 21) erreichbar.
- Als Hilfsmittel sind zugelassen: Taschenrechner (auch mit Grafikfähigkeit), 2 selbstgestaltete DIN-A4 Blätter bzw. 4 selbstgestaltete (einseitige) DIN-A4 Seiten. Benötigte Tabellen zur Normal- und  $t$ -Verteilung finden Sie am Ende dieses Klausurheftes.
- Bei der Korrektur werden **nur** die Lösungen auf den Seiten 1–26 berücksichtigt. Das letzte Blatt (Tabellen zur Normal- und  $t$ -Verteilung) darf abgetrennt werden.
- Bei mehreren Lösungsvorschlägen muss die gültige Lösung eindeutig gekennzeichnet sein.
- Mit Ausnahme der Multiple-Choice-Aufgaben muss der Lösungsweg klar ersichtlich sein.
- Alle Punkte innerhalb von Zahlen sind stets Dezimalpunkte (und keine Tausenderpunkte).

<b>Bewertungsteil — Bitte nicht beschreiben</b>							
Aufgabe	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	$\Sigma$
1		■	■	■	■	■	
2		■	■	■	■	■	
3			■	■	■	■	
4				■	■	■	
5					■	■	
6			■	■	■	■	
7		■	■	■	■	■	
8							
9						■	
$\Sigma$							

**Aufgabe 1** (16 Punkte)

Markieren Sie jeweils mit einem Kreuz pro Aussage im betreffenden Kästchen, ob die unten stehenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Richtige Antworten geben 2 Punkte, falsche Antworten und nicht bearbeitete Aussagen 0 Punkte (Aussagen mit zwei Kreuzen zählen als nicht bearbeitet!).

- |  | wahr                     | falsch                   |
|--|--------------------------|--------------------------|
| 1. Weisen die Stichprobenzufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ unterschiedliche Verteilungen auf, so kann es sich bei $X_1, \dots, X_n$ nicht um eine einfache Stichprobe handeln.  | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 2. Ist eine Familie von Schätzfunktionen $T_n, n \in \mathbb{N}$ , konsistent im quadratischen Mittel für einen Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ , so gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ stets $\text{Var}(T_n) = 0$ .   | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 3. Lehnt ein rechtsseitiger Chi-Quadrat-Test für die Varianz einer normalverteilten Zufallsvariablen bei unbekanntem Erwartungswert die Nullhypothese zu einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0.10$ ab, so wird die Nullhypothese stets auch bei einem entsprechenden Test zum Signifikanzniveau von $\tilde{\alpha} = 0.05$ verworfen. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 4. Ist die Nullhypothese $H_0$ tatsächlich falsch, so wird man bei der Anwendung eines statistischen Tests zum Signifikanzniveau 0.05 nur mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 5% eine Stichprobenrealisation erhalten, die nicht zu einer Ablehnung von $H_0$ führt.  | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 5. Beim zweiseitigen Gauß-Test für den Erwartungswert bei bekannter Varianz (mit $H_0 : \mu = \mu_0$ ) ist der $p$ -Wert (bei gleichbleibendem Stichprobenumfang) umso niedriger, je größer der Abstand $ \bar{X} - \mu_0 $ ausfällt.  | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 6. Das Verkleinern des Signifikanzniveaus $\alpha$ führt bei sämtlichen in der Veranstaltung besprochenen Hypothesentests stets zu einer Verkleinerung des kritischen Bereichs.  | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 7. Sind die Voraussetzungen zur Anwendung der einfachen Varianzanalyse erfüllt und liegen als Stichprobenrealisation jeweils 30 Beobachtungen zu 5 Faktorstufen vor, so ist die Teststatistik bei Gültigkeit der Nullhypothese $F(5, 145)$ -verteilt.  | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 8. Im einfachen linearen Regressionsmodell   | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 \cdot x_i + u_i, \quad u_i \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0, \sigma^2), \quad i = 1, \dots, n,$$

kann die Summe der quadrierten Residuen  $\sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2$  (mit  $\hat{u}_i = y_i - (\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \cdot x_i)$ ) nicht dadurch verkleinert werden, dass die KQ-Schätzer  $\hat{\beta}_1$  und  $\hat{\beta}_2$  durch andere (reelle) Zahlen ersetzt werden.

**Aufgabe 2** (12 Punkte)

Markieren Sie jeweils die korrekte Antwort mit einem Kreuz im betreffenden Kästchen. Es ist jeweils genau ein Kreuz korrekt.

Richtige Antworten geben 3 Punkte, falsche Antworten und nicht bearbeitete Aufgabenteile 0 Punkte (Aufgabenteile mit mehr als einem Kreuz zählen als nicht bearbeitet!).

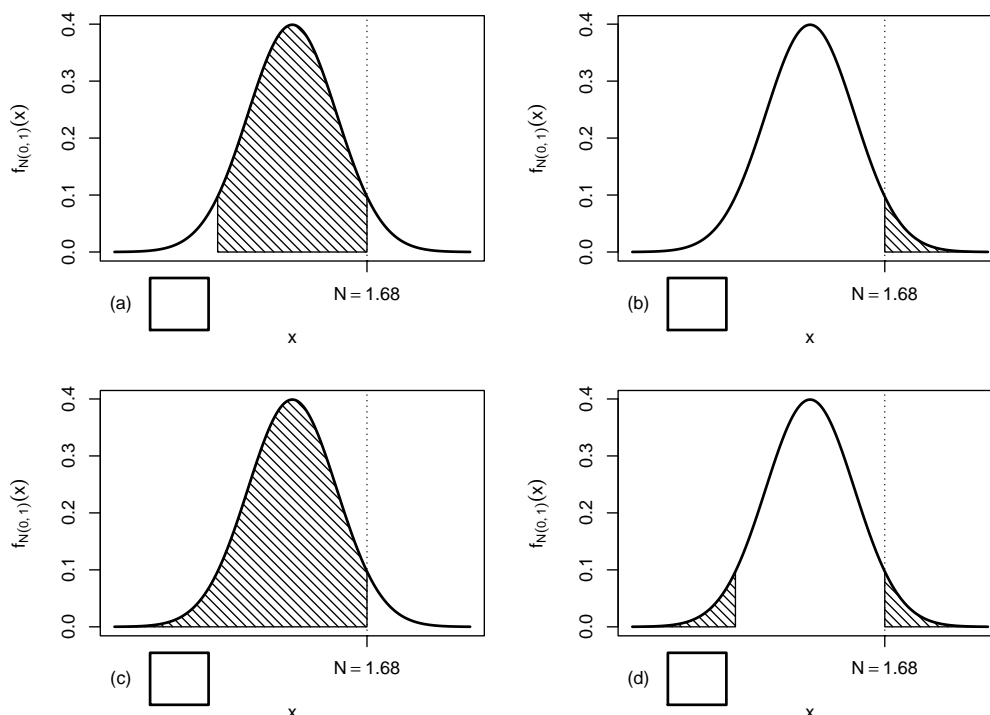
1. Es sei  $X_1, \dots, X_{36}$  eine einfache Stichprobe vom Umfang 36 zu  $Y$  mit  $Y \sim N(300, 18^2)$ . Dann gilt für die Verteilung von  $\bar{X} = \frac{1}{36} \sum_{i=1}^{36} X_i$ :

- (a)  $\bar{X} \sim N(300, 3^2)$
- (b)  $\bar{X} \sim N(300, 6^2)$
- (c)  $\bar{X} \sim N(300, 9^2)$
- (d)  $\bar{X} \sim N(300, 18^2)$

2. Sei  $X_1, \dots, X_{25}$  eine einfache Stichprobe zu einer  $N(\mu, \sigma_0^2)$ -verteilten Zufallsvariablen  $Y$  mit unbekanntem Parameter  $\mu$  und bekanntem  $\sigma_0^2 = 2^2$ . Auf der Grundlage einer Stichprobenrealisation zu dieser einfachen Stichprobe vom Umfang  $n = 25$  soll

$$H_0 : \mu = \mu_0 = 30 \quad \text{gegen} \quad H_1 : \mu \neq \mu_0 = 30$$

mit einem Gauß-Test getestet werden. Als realisierte Teststatistik erhält man  $N = 1.68$ . Markieren Sie die Abbildung, welche den  $p$ -Wert in der beschriebenen Situation korrekt als Inhalt der schraffierten Fläche unter der Dichtefunktion der Verteilung der Teststatistik unter  $H_0$  (für  $\mu = \mu_0$ ) darstellt.

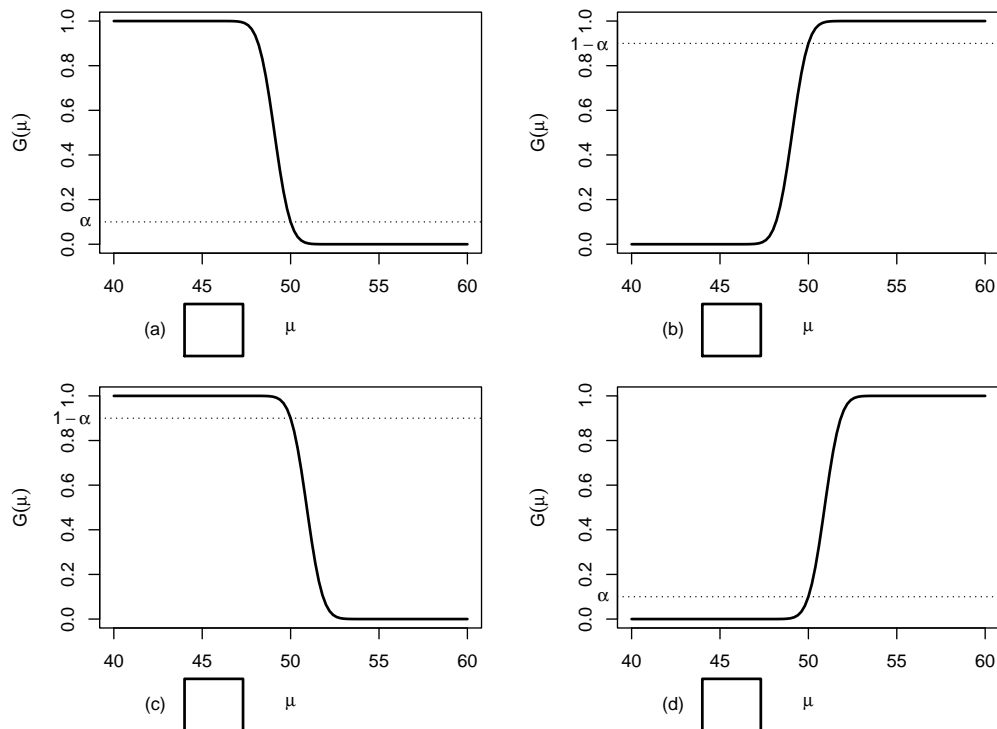


3. Auf der Grundlage einer einfachen Stichprobe  $X_1, \dots, X_{49}$  vom Umfang  $n = 49$  zu einer  $N(\mu, 5^2)$ -verteilten Zufallsvariablen wird ein Gauß-Test zur Überprüfung der Hypothesen

$$H_0 : \mu \geq 50 \quad \text{gegen} \quad H_1 : \mu < 50$$

bei einem Signifikanzniveau von  $\alpha = 0.1$  betrachtet.

Markieren Sie die Abbildung, welche die Gütefunktion des oben genannten Tests korrekt darstellt.



4. Bei der Durchführung eines linksseitigen Gauß-Tests für den Mittelwert einer normalverteilten Grundgesamtheit bei bekannter Varianz (mit  $H_0 : \mu \geq \mu_0$  gegen  $H_1 : \mu < \mu_0$ ) wird die Nullhypothese zum Signifikanzniveau  $\alpha = 0.05$  abgelehnt. Dann gilt für die Testentscheidungen des rechtsseitigen (mit  $H_0 : \mu \leq \mu_0$  gegen  $H_1 : \mu > \mu_0$ ) und zweiseitigen (mit  $H_0 : \mu = \mu_0$  gegen  $H_1 : \mu \neq \mu_0$ ) Tests (bei unverändertem Signifikanzniveau  $\alpha = 0.05$ ):

- (a) Der rechtsseitige Test lehnt  $H_0$  ab, die Entscheidung des zweiseitigen Tests kann für oder gegen  $H_0$  ausfallen.
- (b) Der rechtsseitige Test lehnt  $H_0$  nicht ab, die Entscheidung des zweiseitigen Tests kann für oder gegen  $H_0$  ausfallen.
- (c) Der rechtsseitige Test lehnt  $H_0$  ab, der zweiseitige Test lehnt  $H_0$  nicht ab.
- (d) Der rechtsseitige Test lehnt  $H_0$  nicht ab, der zweiseitige Test lehnt  $H_0$  ab.

**Aufgabe 3** (4 + 2 = 6 Punkte)

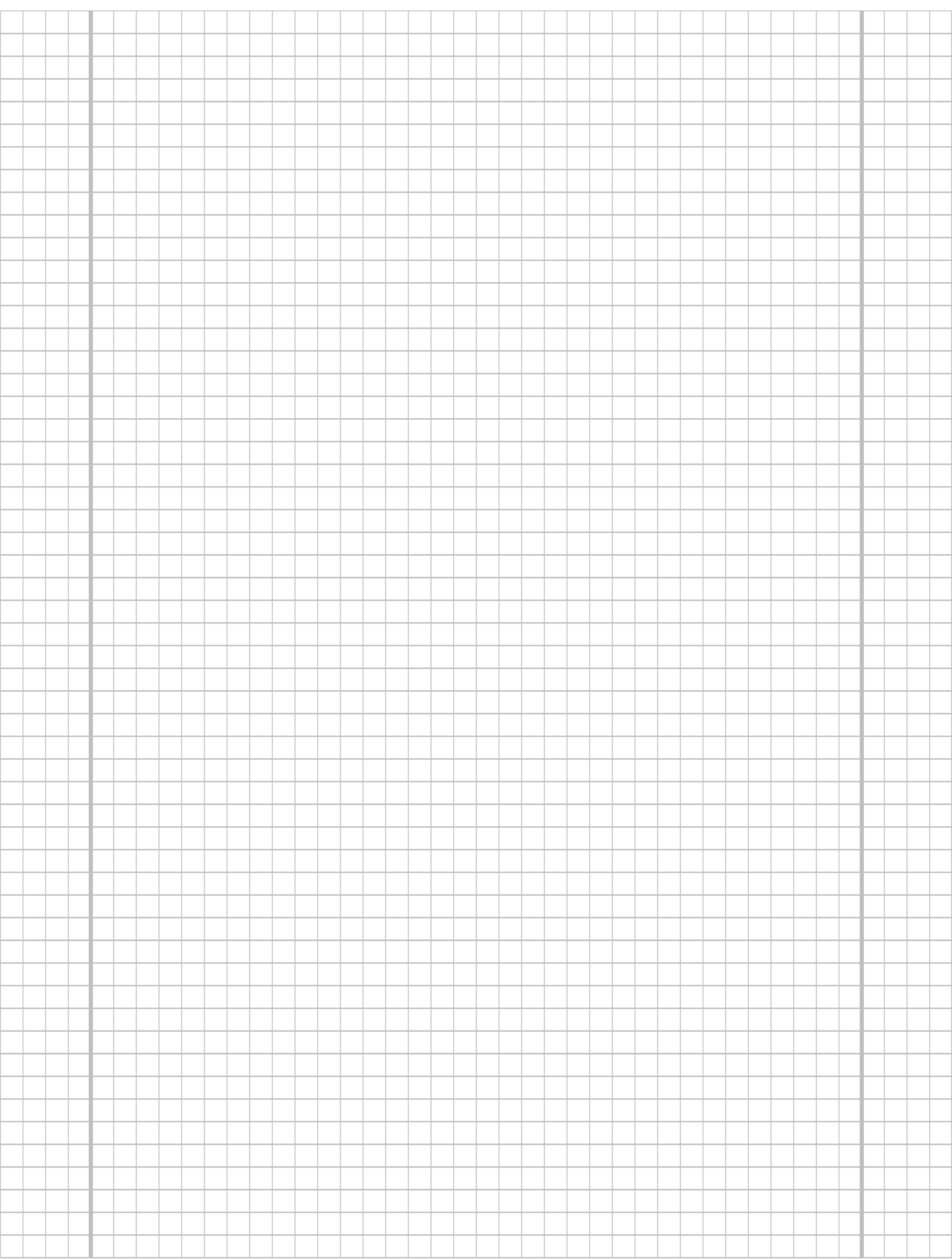
In Abhängigkeit eines unbekanntes Parameters  $p > 0$  seien der Erwartungswert und die Varianz einer Zufallsvariablen  $Y$  gegeben durch  $E(Y) = \frac{1}{p}$  sowie  $\text{Var}(Y) = \frac{1}{p^2}$ . Für  $n \in \mathbb{N}$  sei  $X_1, \dots, X_n$  eine einfache Stichprobe vom Umfang  $n$  zu  $Y$ .

- (a) Zeigen Sie, dass die Schätzfunktionen

$$T_n(X_1, \dots, X_n) := \frac{1}{3n} \sum_{i=1}^n X_i^2$$

**nicht** erwartungstreu für **die Varianz von  $Y$**  sind.

- (b) Geben Sie für **die Varianz von  $Y$**  erwartungstreue Schätzfunktionen  $\tilde{T}_n(X_1, \dots, X_n)$  an.



**Aufgabe 4** (6 + 3 + 1 = 10 Punkte)

Die Verteilung einer Zufallsvariablen  $Y$  sei in Abhängigkeit des unbekanntes Parameters  $b > 0$  durch die folgende Dichtefunktion gegeben:

$$f_Y(y|b) = \begin{cases} \frac{4 \cdot b^4}{y^5} & \text{für } y \geq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

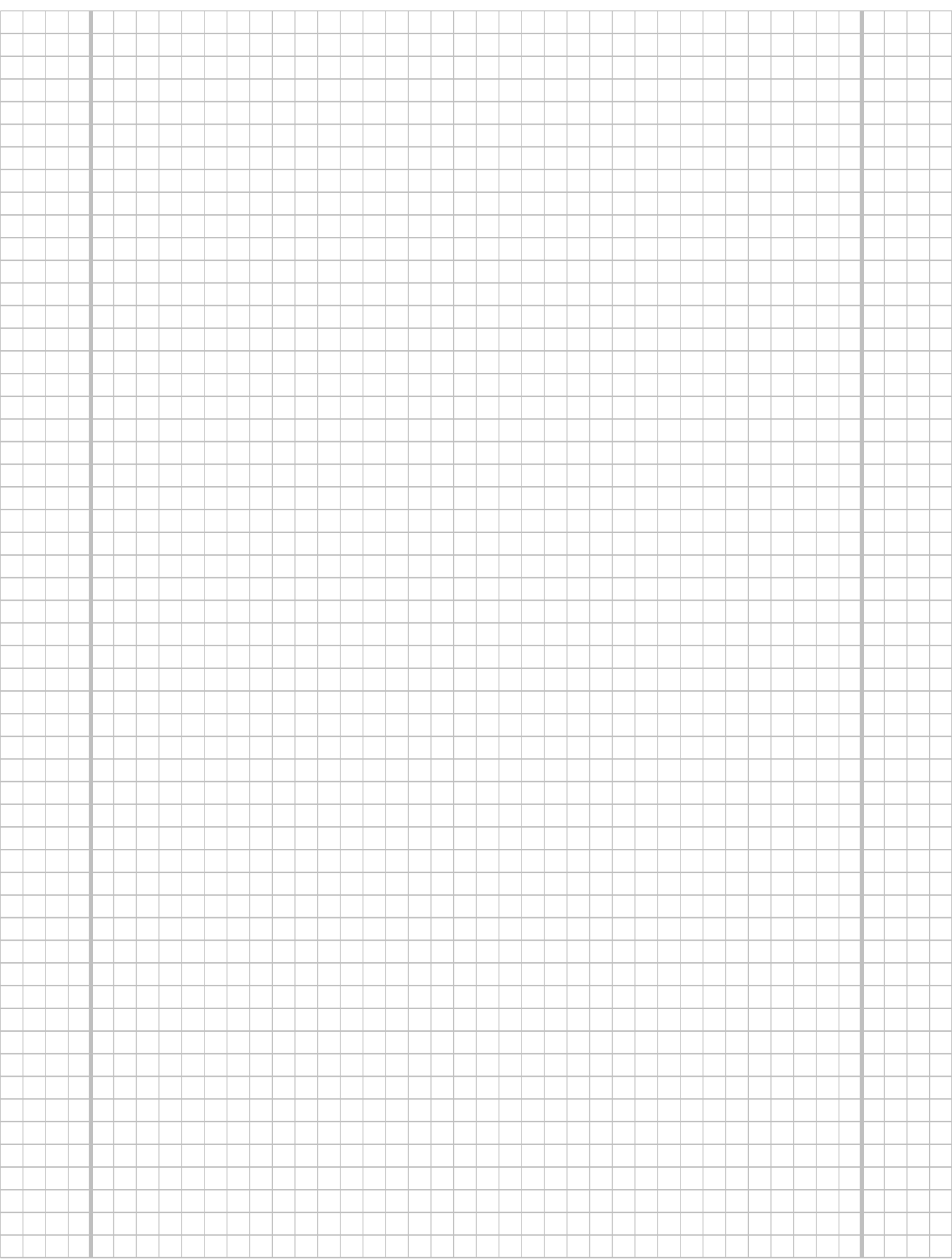
Der Parameter  $b$  soll auf Grundlage einer einfachen Stichprobe  $X_1, \dots, X_n$  vom Umfang  $n$  geschätzt werden.

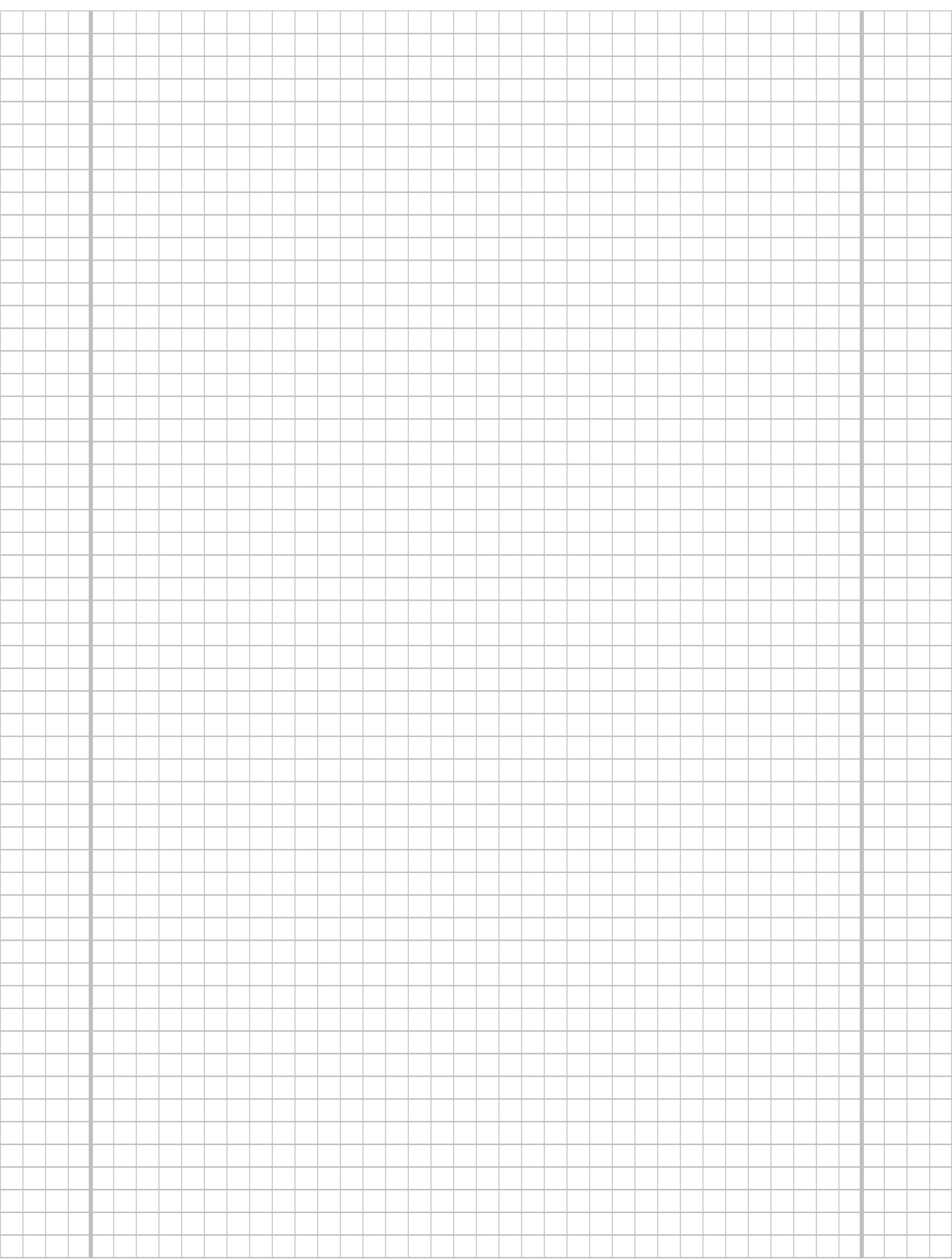
- (a) Bestimmen Sie den Schätzer  $\hat{b}_{ML}$  nach der Maximum-Likelihood-Methode.
- (b) Zeigen Sie, dass  $E(Y) = \frac{4}{3} \cdot b$  gilt.
- (c) Bestimmen Sie den Schätzer  $\hat{b}_{MM}$  nach der Methode der Momente.

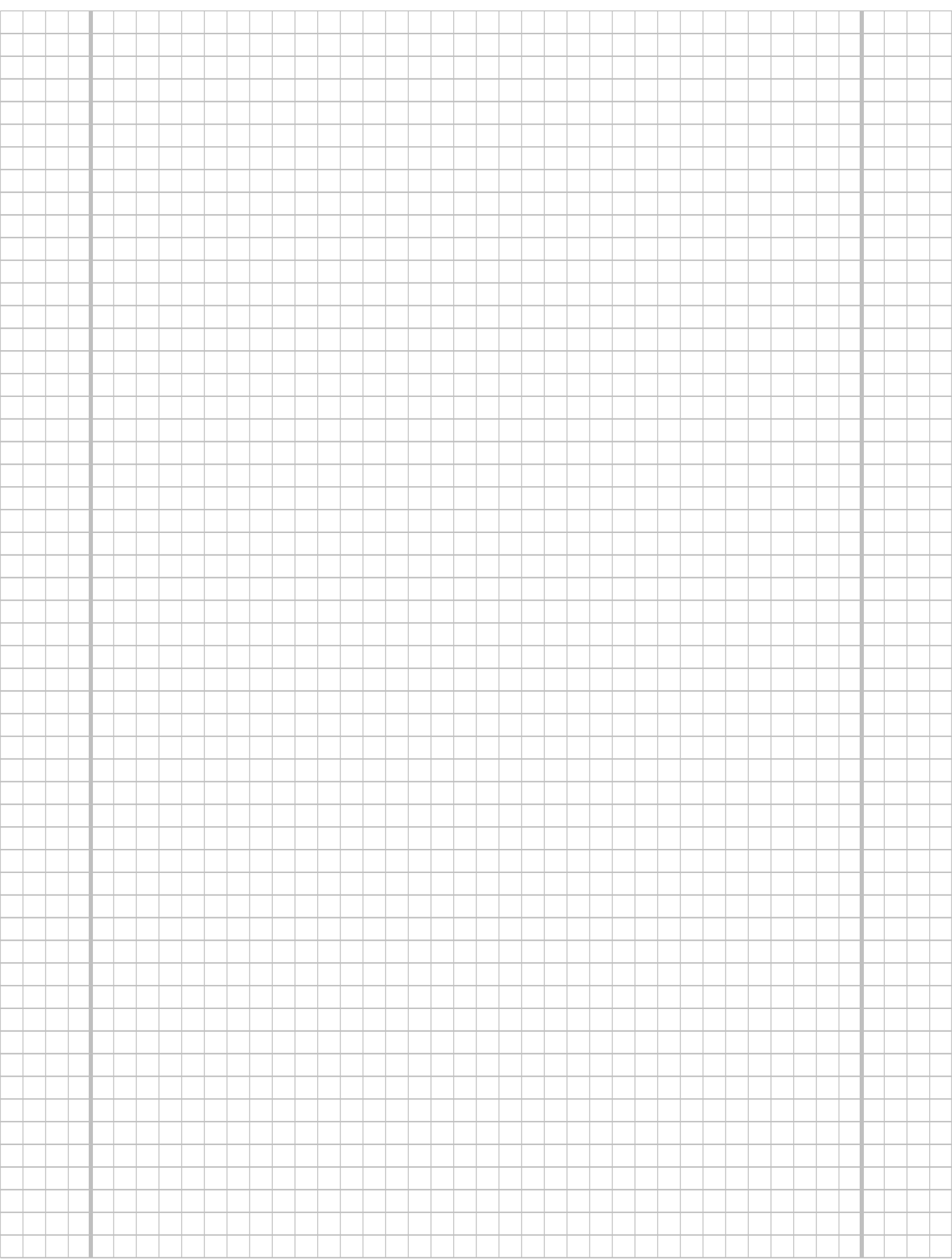
*Hinweise:*

- Beachten Sie, dass Sie Teil (b) auch ohne die Bearbeitung von Teil (a) und Teil (c) ohne die Bearbeitung der Teile (a) und (b) lösen können.
- Falls sich der ML-Schätzer als lokale Extremstelle einer differenzierbaren Funktion bestimmen lässt, muss **nicht** überprüft werden (z.B. mit Hilfe der 2. Ableitung), ob tatsächlich eine Maximalstelle vorliegt.









**Aufgabe 5** (7 + 2 + 3 + 7 = 19 Punkte)

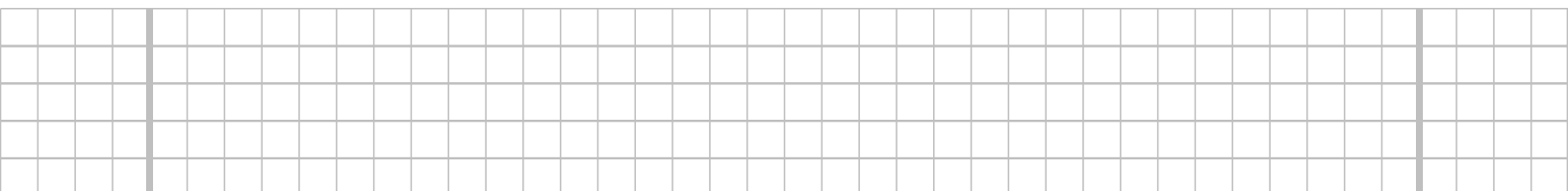
Bei der Befüllung von Propangasflaschen weiß der Hersteller aus Erfahrung, dass die verwendete Abfüllanlage eine Standardabweichung von  $0.2[kg]$  für die abgefüllte Menge hat. Nach einer Inventur hat der Hersteller den Verdacht, dass die Abfüllanlage im Mittel mehr als die auf dem Produkt ausgezeichneten  $11[kg]$  in die Gasflaschen einfüllt. Dies soll mit einem statistischen Test überprüft werden. Hierzu werden der Produktion 16 Gasflaschen entnommen, deren gemessene Füllmengen  $x_1, \dots, x_{16}$  als Realisation einer einfachen Stichprobe vom Umfang 16 zur annahmegemäß  $N(\mu, 0.2^2[kg^2])$ -verteilten Abfüllmenge betrachtet werden können. Als Stichprobenmittelwert ergibt sich dabei

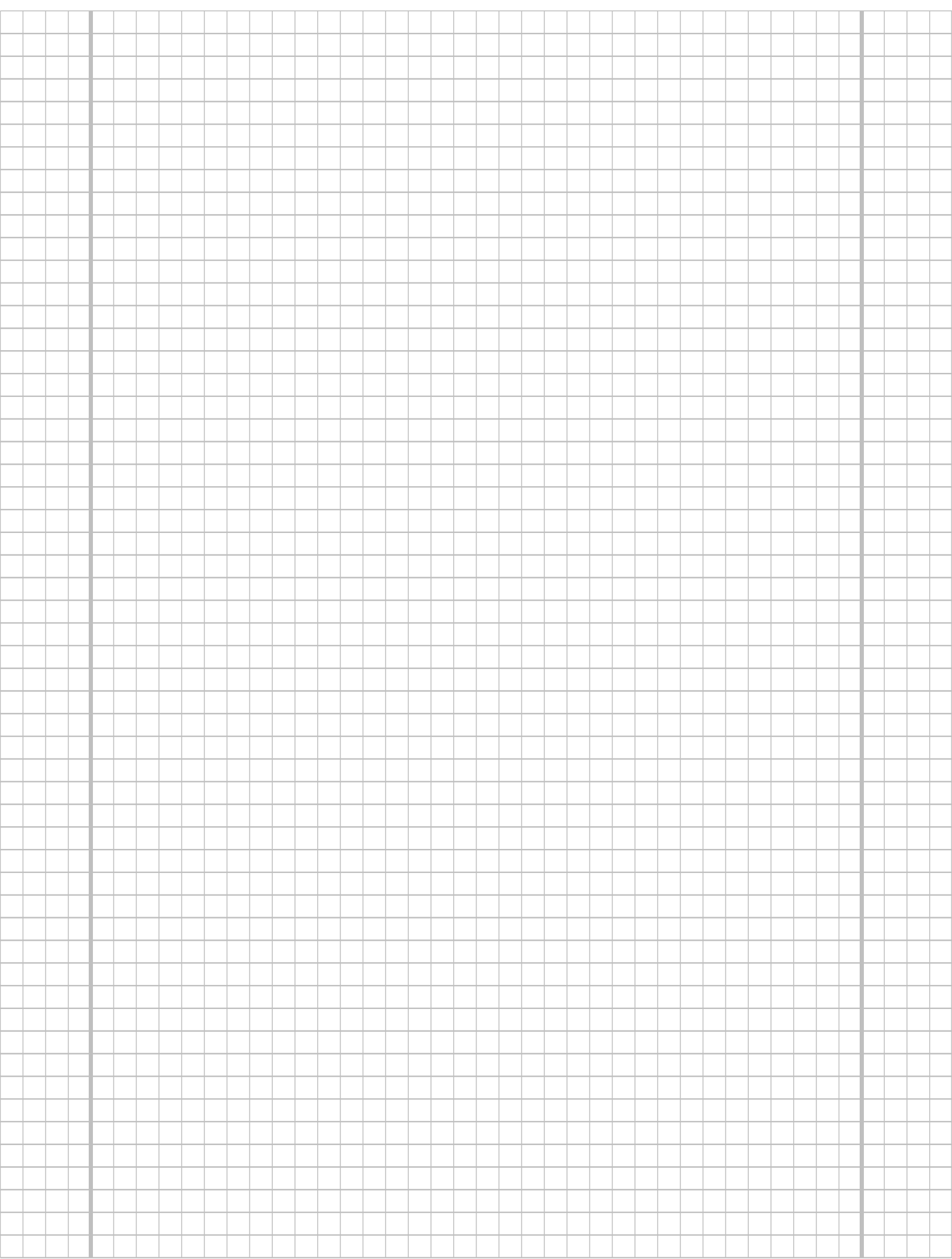
$$\bar{x} = \frac{1}{16} \sum_{i=1}^{16} x_i = 11.107[kg] .$$

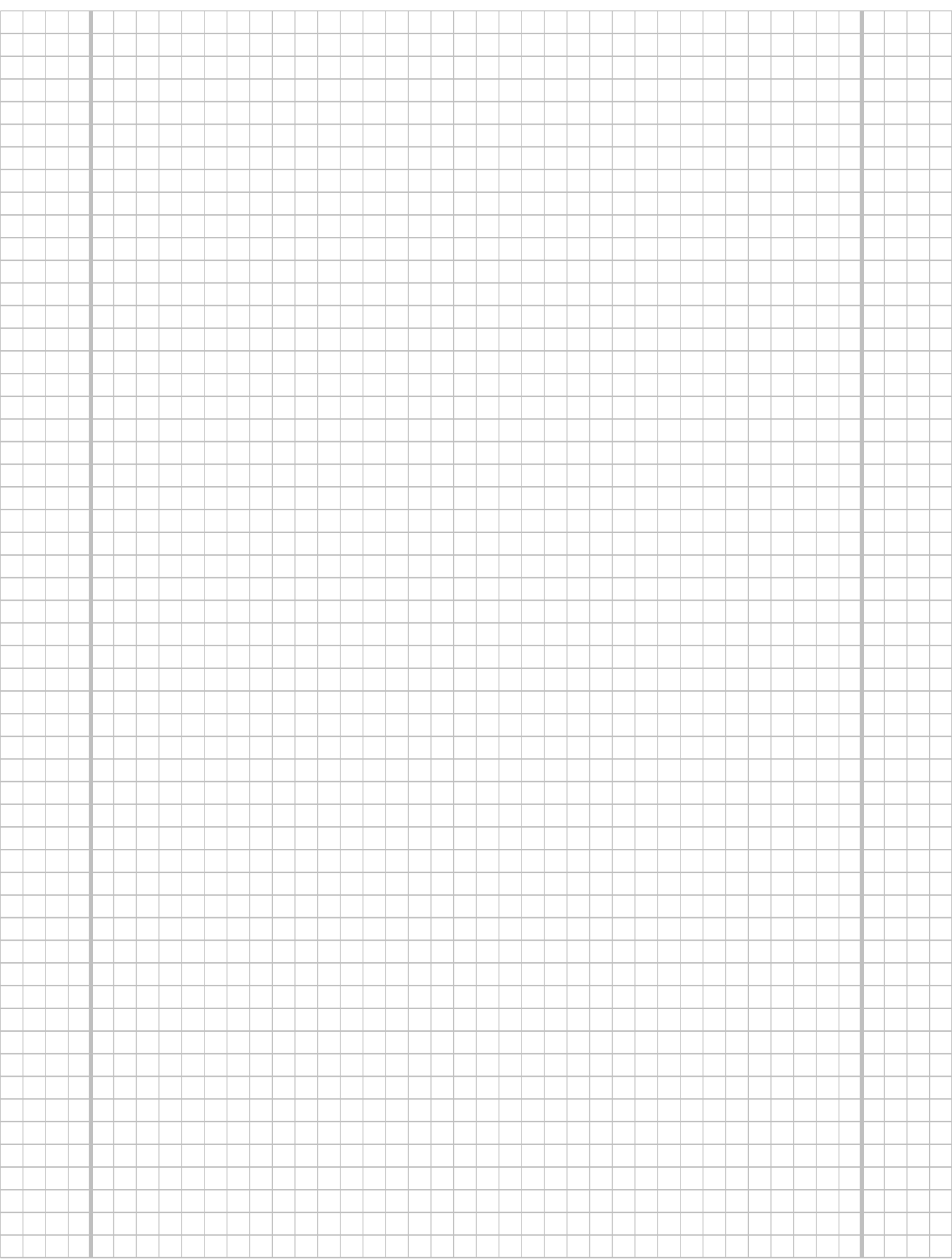
- Testen Sie zum Signifikanzniveau  $\alpha = 0.05$ , ob der Verdacht der Herstellerfirma bestätigt werden kann. Fassen Sie das Ergebnis des Tests in einem Antwortsatz zusammen.
- Berechnen Sie den  $p$ -Wert zum Test aus Teil (a). Wie wäre die Entscheidung zum Test aus Teil (a) bei einem Signifikanzniveau von  $\alpha = 0.01$  ausgefallen?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei der Ziehung einer Stichprobe und der anschließenden Durchführung des Tests aus Teil (a) eine Testentscheidung zu Gunsten der Nullhypothese zu erhalten, falls die tatsächliche mittlere Abfüllmenge  $11.15[kg]$  beträgt?
- Überprüfen Sie unter Verwendung der Varianzschätzung  $s^2 = 0.04085$  mit einem geeigneten Test zum Signifikanzniveau  $\alpha = 0.05$ , ob die oben getroffene Annahme  $\sigma^2 = 0.2^2$  aus statistischer Sicht zu verwerfen ist. Fassen Sie das Ergebnis des Tests in einem Antwortsatz zusammen.

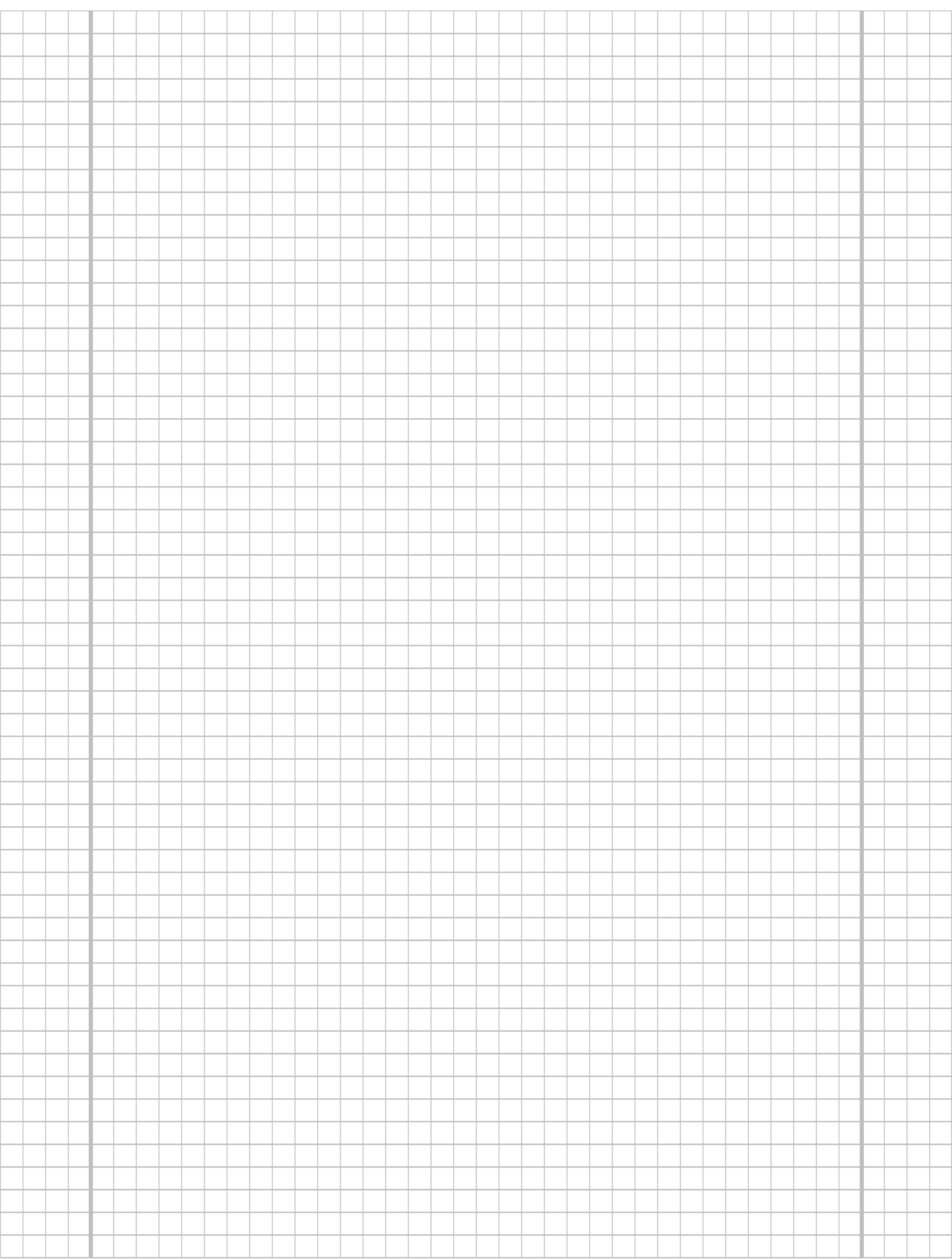
*Hinweis: Verwenden Sie für Teil (d) den folgenden Tabellenausschnitt mit  $p$ -Quantilen von  $\chi^2(n)$ -Verteilungen*

$n \backslash p$	0.01	0.025	0.05	0.50	0.90	0.95	0.975	0.99
11	3.053	3.816	4.575	10.341	17.275	19.675	21.920	24.725
12	3.571	4.404	5.226	11.340	18.549	21.026	23.337	26.217
13	4.107	5.009	5.892	12.340	19.812	22.362	24.736	27.688
14	4.660	5.629	6.571	13.339	21.064	23.685	26.119	29.141
15	5.229	6.262	7.261	14.339	22.307	24.996	27.488	30.578
16	5.812	6.908	7.962	15.338	23.542	26.296	28.845	32.000
17	6.408	7.564	8.672	16.338	24.769	27.587	30.191	33.409
18	7.015	8.231	9.390	17.338	25.989	28.869	31.526	34.805
19	7.633	8.907	10.117	18.338	27.204	30.144	32.852	36.191
20	8.260	9.591	10.851	19.337	28.412	31.410	34.170	37.566









**Aufgabe 6** (10 + 8 = 18 Punkte)

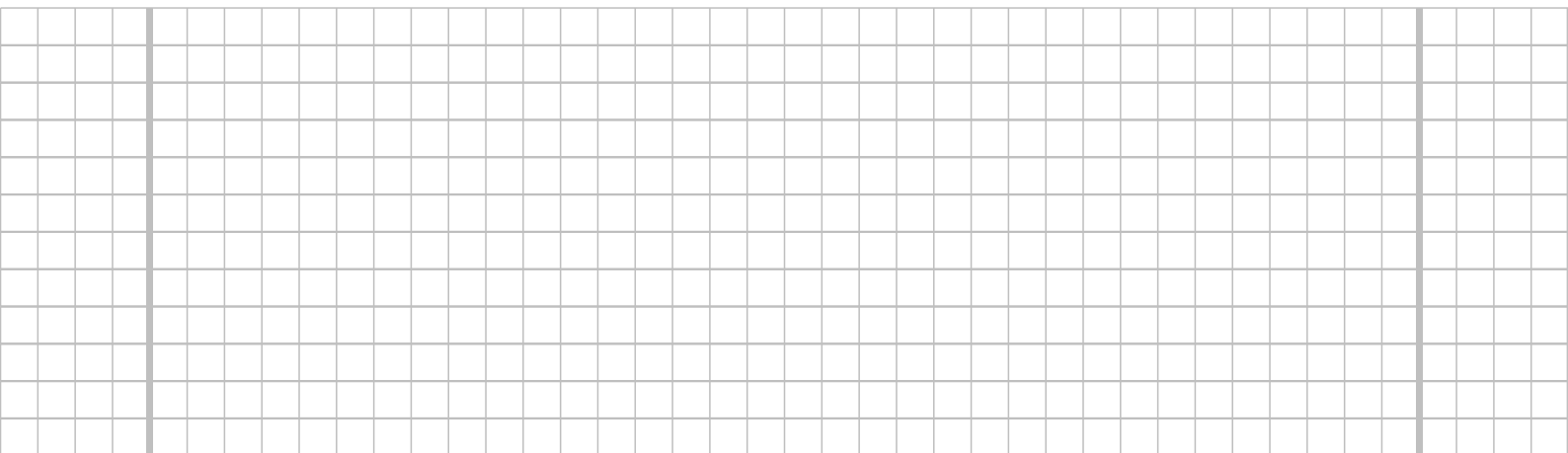
Ein Anbieter von Powerstations muss sich bei der Entwicklung und Herstellung eines neuen Modells zwischen zwei verschiedenen Lithium-Ionen-Rundzellen (“Typ A” und “Typ B”) entscheiden. Nominell weist der Lieferant für Rundzellen des Typs B verglichen mit Typ A eine höhere entnehmbare Energie aus. Man nehme an, dass die tatsächlich entnehmbare Energie  $Y^A$  bzw.  $Y^B$  einer Rundzelle vom jeweiligen Typ (A bzw. B) jeweils normalverteilt sei mit den unbekanntem Erwartungswerten  $\mu_A$  bzw.  $\mu_B$  sowie den unbekanntem Varianzen  $\sigma_A^2$  bzw.  $\sigma_B^2$ . Es soll überprüft werden, ob Rundzellen vom Typ B verglichen mit Typ A im Mittel tatsächlich eine höhere entnehmbare Energie liefern.

Aus einer Energiemessung von  $n_A = 12$  Testexemplaren des Typs A sowie  $n_B = 14$  Testexemplaren des Typs B erhielt man Realisationen jeweils voneinander unabhängiger einfacher Stichproben  $X_1^A, \dots, X_{12}^A$  zu  $Y^A$  sowie  $X_1^B, \dots, X_{14}^B$  zu  $Y^B$  und hieraus die zugehörigen Mittelwerte  $\bar{x}^A = 18.25$  bzw.  $\bar{x}^B = 19.214$  sowie die Stichprobenvarianzen  $s_{Y^A}^2 = 0.932$  bzw.  $s_{Y^B}^2 = 0.797$ .

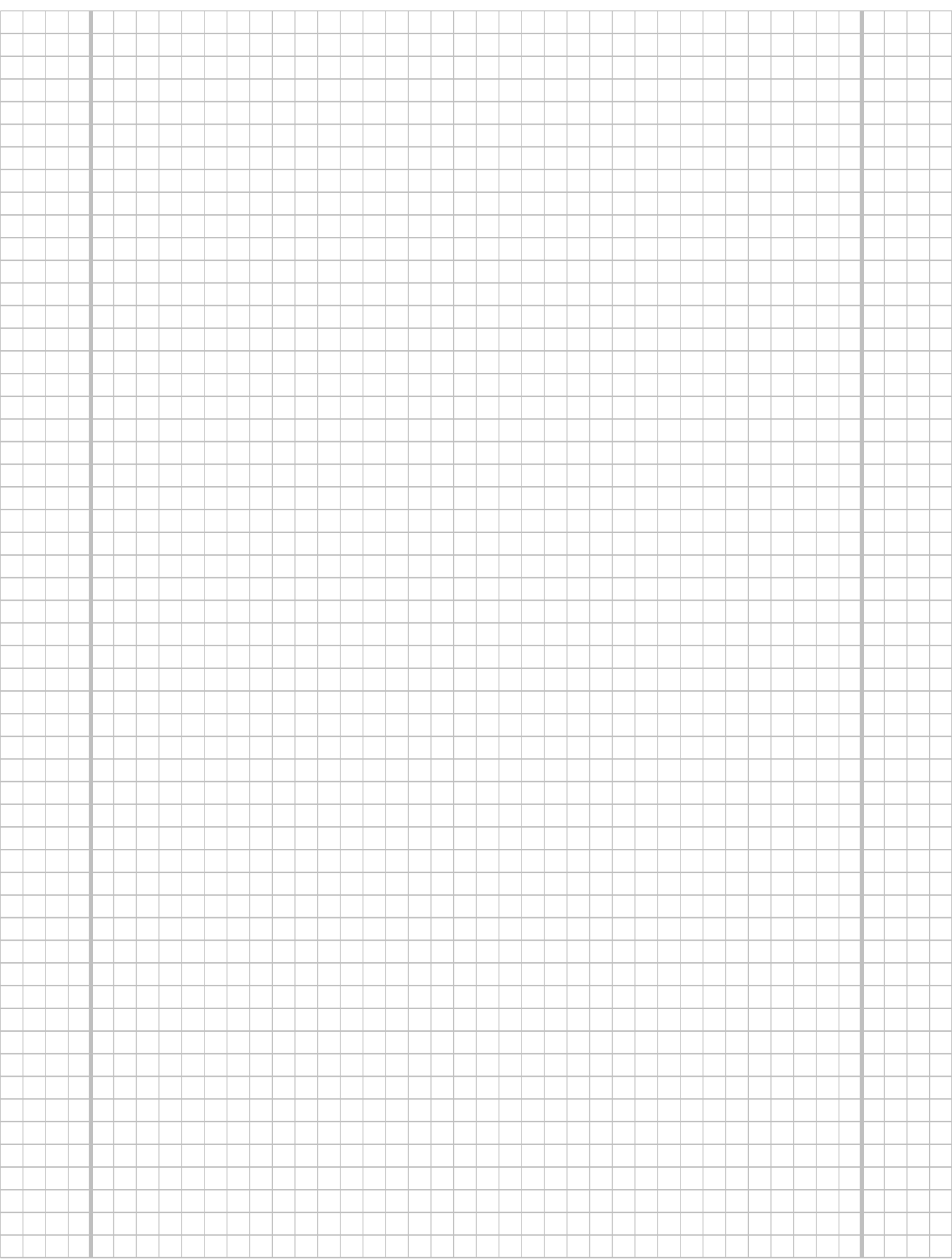
- (a) Testen Sie unter der Annahme  $\sigma_A^2 = \sigma_B^2$  zum Signifikanzniveau  $\alpha = 0.05$  die Hypothese, dass Rundzellen vom Typ B verglichen mit Typ A im Mittel tatsächlich eine höhere entnehmbare Energie liefern. Fassen Sie das Ergebnis des Tests in einem Antwortsatz zusammen.
- (b) Überprüfen Sie mit einem geeigneten Test zum Signifikanzniveau  $\alpha = 0.10$ , ob die in Teil (a) getroffene Annahme der Varianzgleichheit auf Grundlage der vorhandenen Stichprobeninformation verworfen werden muss. Fassen Sie das Ergebnis des Tests in einem Antwortsatz zusammen.

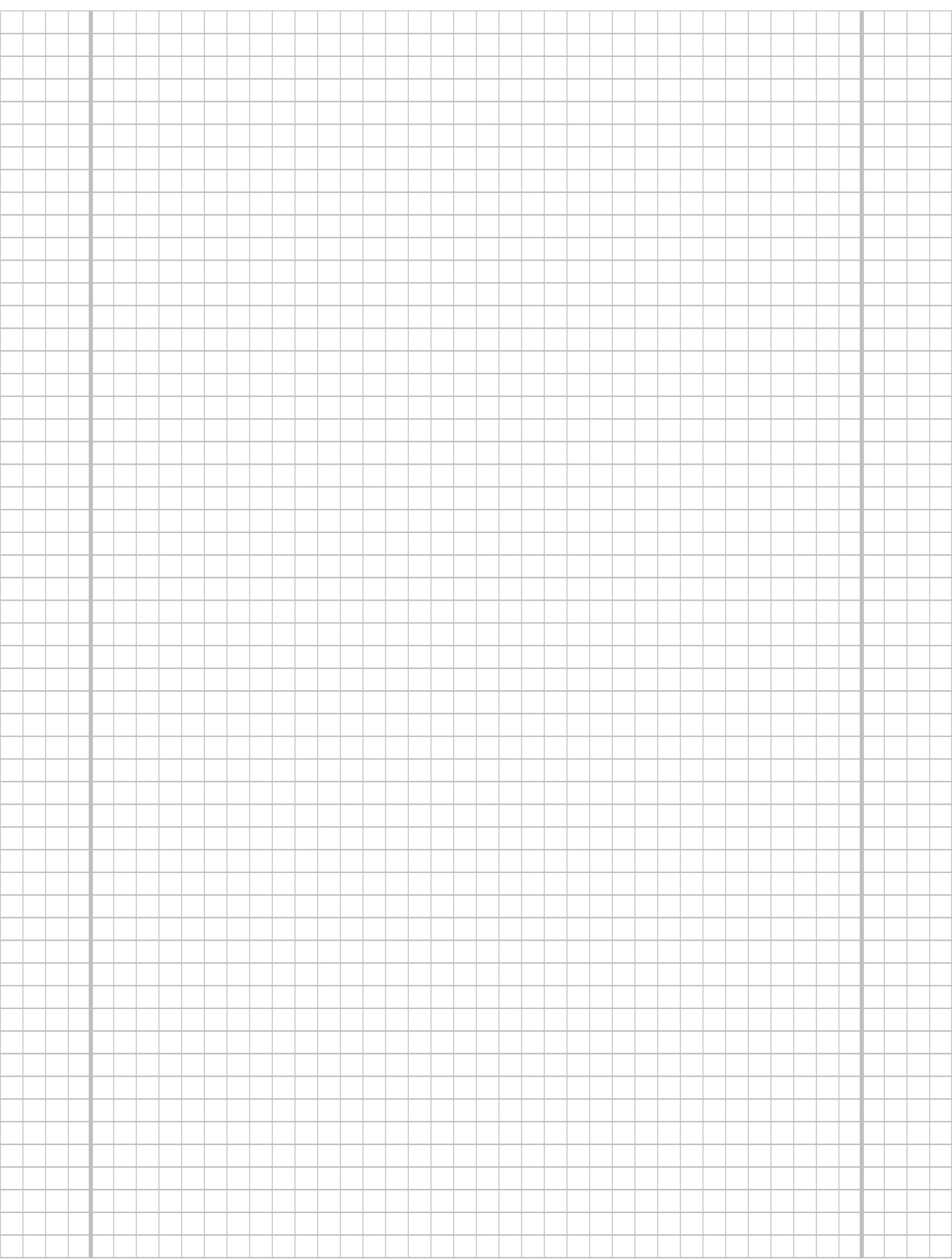
*Hinweis: Verwenden Sie für Teil (b) den folgenden Tabellenausschnitt mit 0.95-Quantilen von  $F(m, n)$ -Verteilungen sowie ggf. die Rechenregel  $F_{m,n;p} = \frac{1}{F_{n,m;1-p}}$ .*

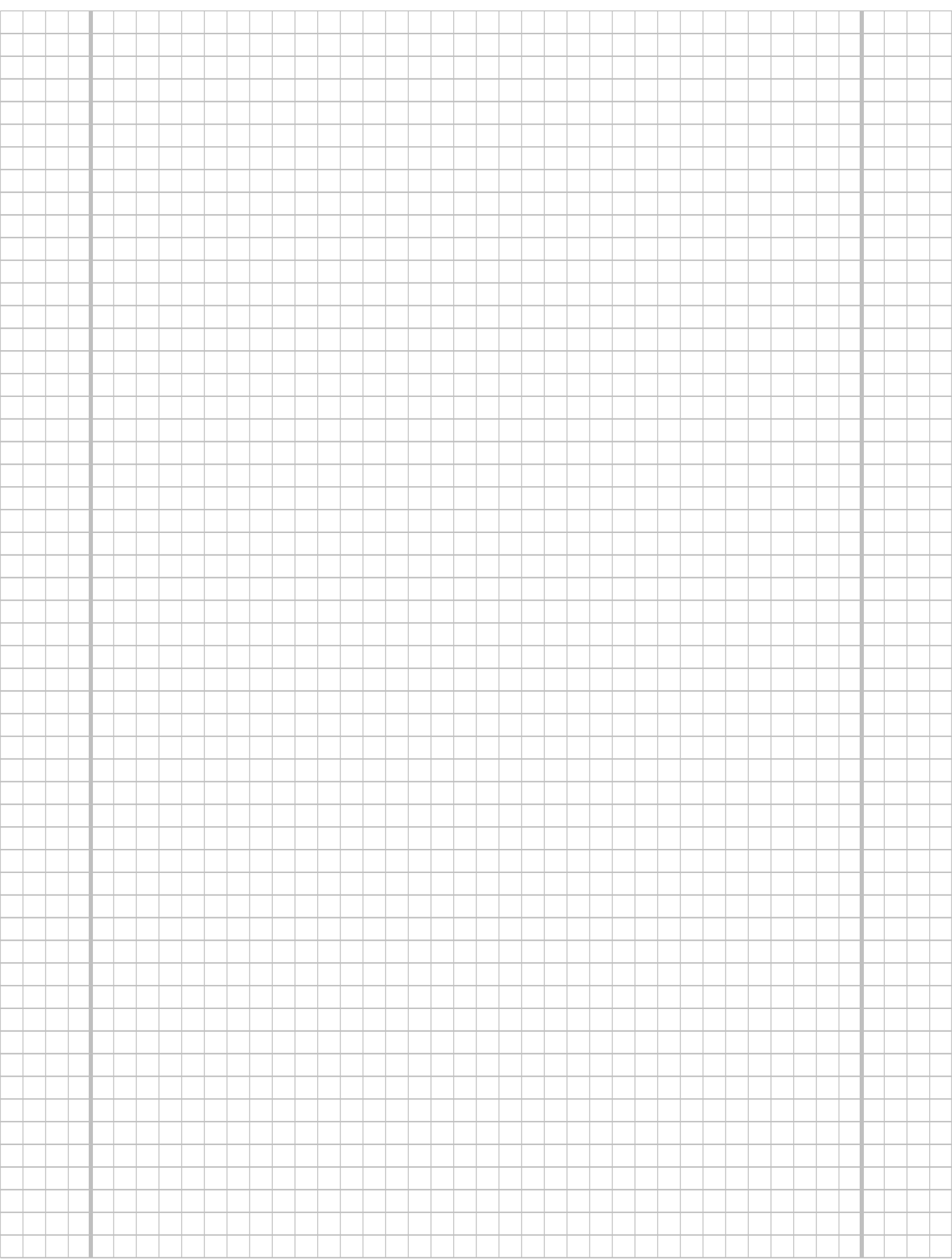
$n \backslash m$	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
11	2.818	2.788	2.761	2.739	2.719	2.701	2.685	2.671	2.658	2.646
12	2.717	2.687	2.660	2.637	2.617	2.599	2.583	2.568	2.555	2.544
13	2.635	2.604	2.577	2.554	2.533	2.515	2.499	2.484	2.471	2.459
14	2.565	2.534	2.507	2.484	2.463	2.445	2.428	2.413	2.400	2.388
15	2.507	2.475	2.448	2.424	2.403	2.385	2.368	2.353	2.340	2.328
16	2.456	2.425	2.397	2.373	2.352	2.333	2.317	2.302	2.288	2.276
17	2.413	2.381	2.353	2.329	2.308	2.289	2.272	2.257	2.243	2.230
18	2.374	2.342	2.314	2.290	2.269	2.250	2.233	2.217	2.203	2.191
19	2.340	2.308	2.280	2.256	2.234	2.215	2.198	2.182	2.168	2.155
20	2.310	2.278	2.250	2.225	2.203	2.184	2.167	2.151	2.137	2.124











**Aufgabe 7** (12 Punkte)

Die in einem bestimmten Chip-Fertigungsprozess hergestellten Halbleiter werden nach ihrer Fertigstellung einer Kontrolle unterzogen und anhand dieser Kontrolle einer der Qualitätsstufen  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $Q_3$  und  $Q_4$  zugeordnet. Aufgrund langjähriger Erfahrung nimmt man als Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Qualitätsstufen an:

Qualitätsstufe	$Q_1$	$Q_2$	$Q_3$	$Q_4$
Wahrscheinlichkeit	0.45	0.27	0.15	0.13

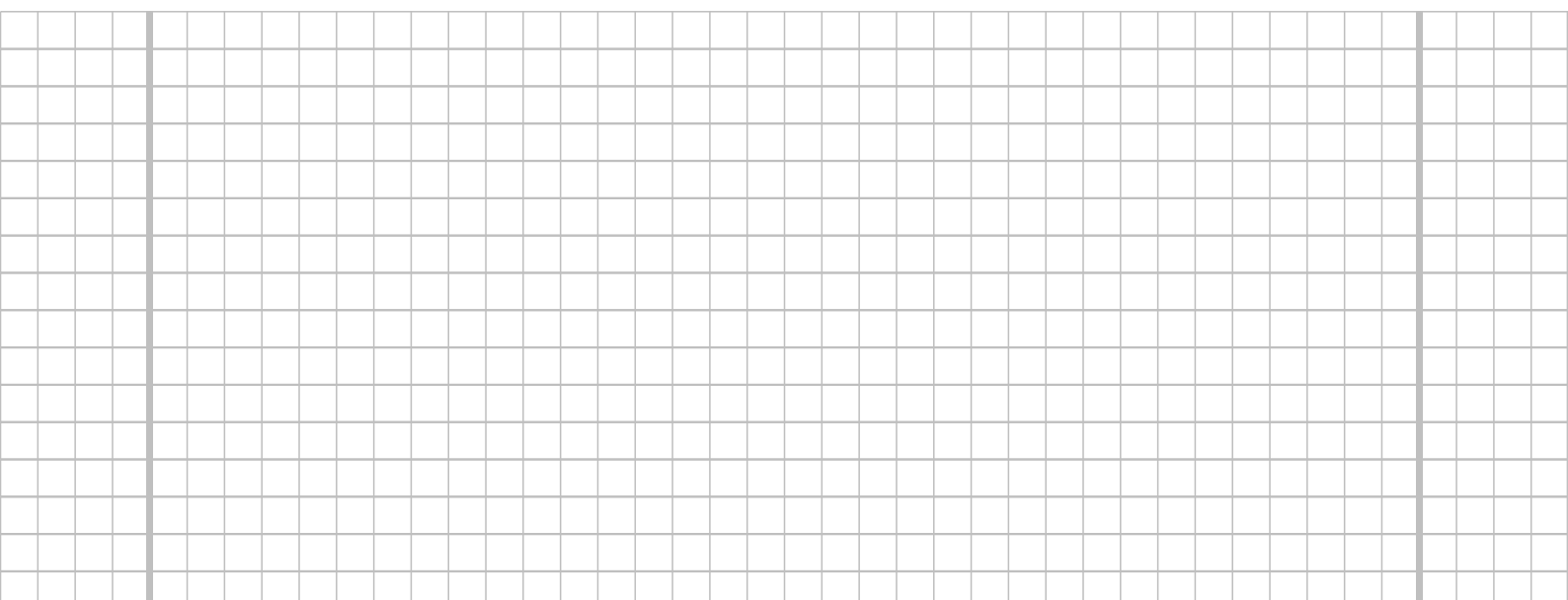
Nach einer Umstellung des Fertigungsprozesses soll untersucht werden, ob sich die Verteilung der produzierten Chips auf die unterschiedlichen Qualitätsstufen geändert hat. Hierzu wurden der laufenden Produktion zufällig 200 Chips entnommen und deren Qualitätsstufen festgestellt. Die festgestellten Qualitätsstufen, die sich annahmegemäß als Realisation einer einfachen Stichprobe vom Umfang 200 auffassen lassen sollen, besitzen die folgende Häufigkeitsverteilung:

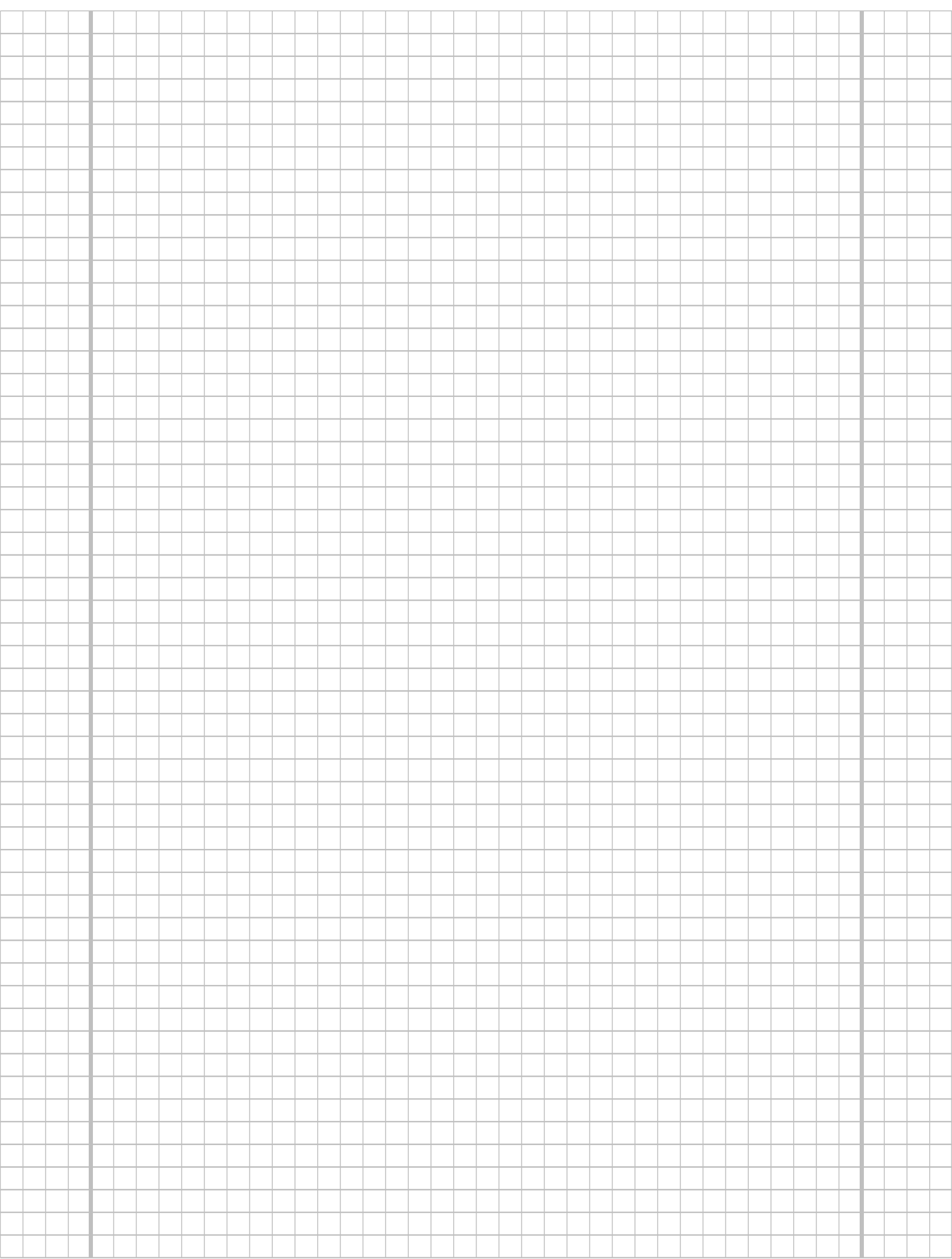
Qualitätsstufe	$Q_1$	$Q_2$	$Q_3$	$Q_4$
(absolute) Häufigkeit	84	65	18	33

Untersuchen Sie auf dieser Grundlage mit einem geeigneten statistischen Test zum Signifikanzniveau  $\alpha = 0.05$ , ob sich die Wahrscheinlichkeitsverteilung auf die Qualitätsstufen nach der Umstellung des Fertigungsprozesses geändert hat.

*Hinweis: Verwenden Sie den folgenden Tabellenausschnitt mit  $p$ -Quantilen von  $\chi^2(n)$ -Verteilungen:*

$n \setminus p$	0.01	0.025	0.05	0.50	0.90	0.95	0.975	0.99
1	0.000	0.001	0.004	0.455	2.706	3.841	5.024	6.635
2	0.020	0.051	0.103	1.386	4.605	5.991	7.378	9.210
3	0.115	0.216	0.352	2.366	6.251	7.815	9.348	11.345
4	0.297	0.484	0.711	3.357	7.779	9.488	11.143	13.277
5	0.554	0.831	1.145	4.351	9.236	11.070	12.833	15.086





**Aufgabe 8** (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6 Punkte)

Zur Erklärung des Verbrauchs alter PKW-Modelle aus dem Modelljahr 1973/74  $y_i$  (in [l/100 km]) durch den Hubraum  $x_i$  (in [cm<sup>3</sup>]) unterstellt man die Gültigkeit eines Zusammenhangs im Sinne des folgenden linearen Modells:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + u_i \quad \text{mit} \quad u_i \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0, \sigma^2), \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

Aus Daten eines Automobil-Magazins aus dem Jahr 1974 wurde das lineare Modell mit der Statistik-Software R wie folgt geschätzt:

Call:

```
lm(formula = y ~ x)
```

Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-1.7174	-0.9476	0.3819	0.4017	2.1528

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	8.0372122	1.1492536	6.993	0.000213 ***
x	0.0026947	0.0007709	3.496	0.010052 *

---

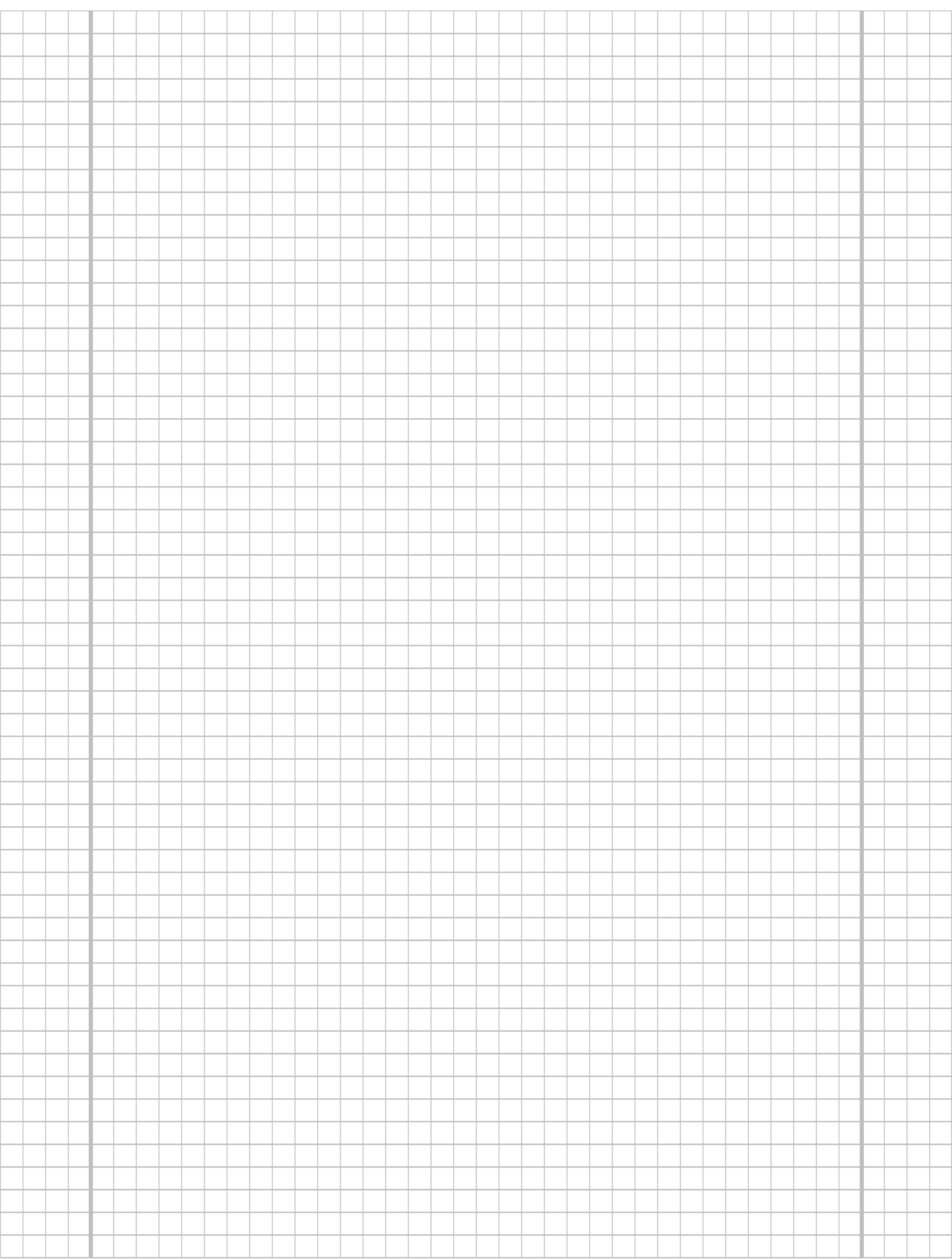
Signif. codes: 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 1.331 on 7 degrees of freedom

Multiple R-squared: 0.6358, Adjusted R-squared: 0.5838

F-statistic: 12.22 on 1 and 7 DF, p-value: 0.01005

- Wie viele PKW-Modelle gingen in die Schätzung ein?
- Geben Sie die realisierten Kleinst-Quadrate-Schätzwerte für  $\beta_1$  und  $\beta_2$  an.
- Welcher Anteil der Gesamtvarianz des Verbrauchs alter PKW-Modelle aus dem Modelljahr 1973/74 wird durch das lineare Modell erklärt?
- Entscheiden Sie mit Hilfe des zugehörigen  $p$ -Werts zum Signifikanzniveau  $\alpha = 0.05$ , ob  $\beta_1$  signifikant von Null verschieden ist.
- Entscheiden Sie mit Hilfe des zugehörigen  $p$ -Werts zum Signifikanzniveau  $\alpha = 0.01$ , ob  $\beta_2$  signifikant positiv ist.
- Welchen Verbrauch (in [l/100 km]) prognostiziert das Modell für einen PKW aus dem Modelljahr 1973/74 mit einem Hubraum von 1200 (in [cm<sup>3</sup>])?



**Aufgabe 9** (6 + 2 + 3 + 5 + 5 = 21 Punkte)

Zur Schätzung eines einfachen linearen Regressionsmodells

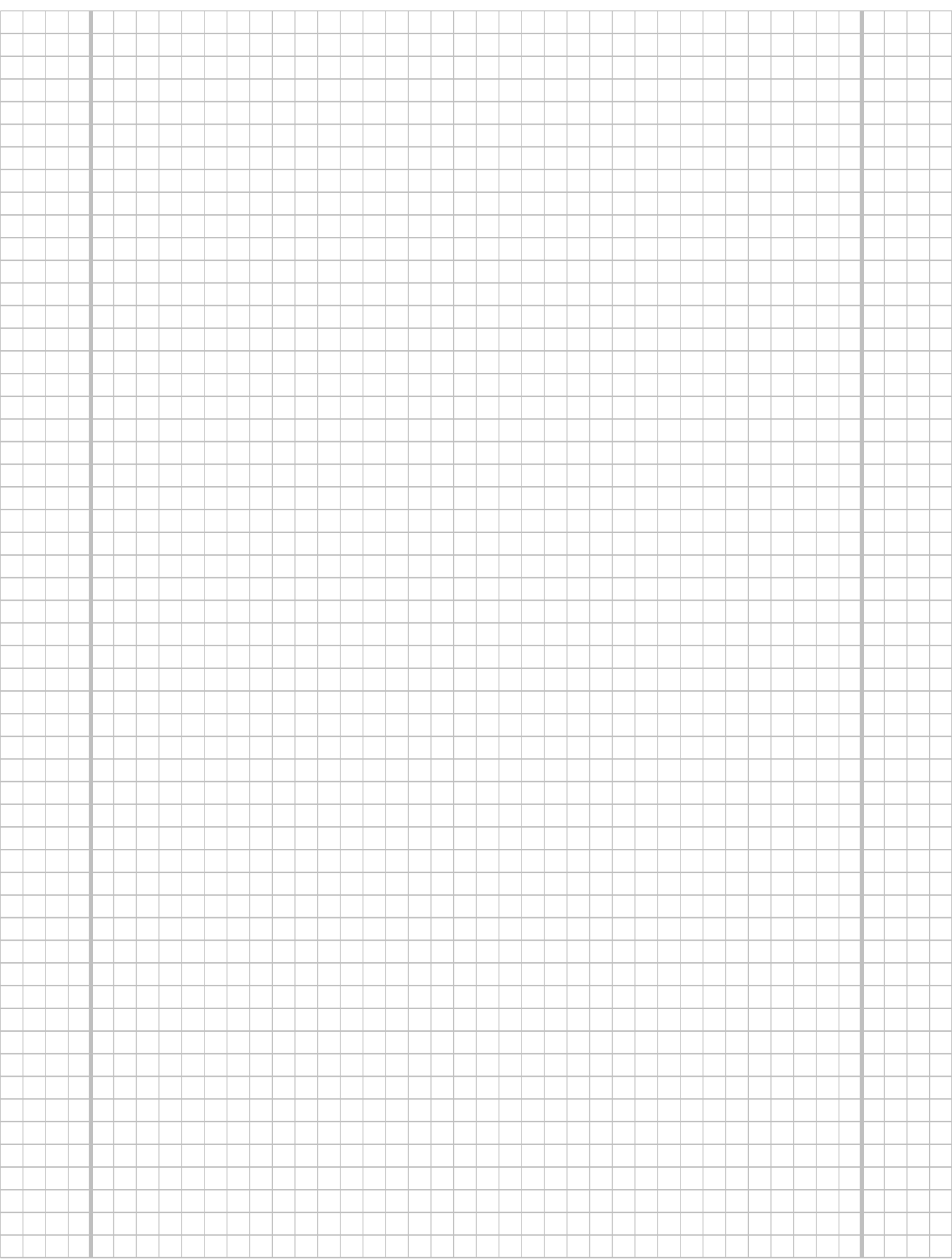
$$y_i = \beta_1 + \beta_2 \cdot x_i + u_i \quad \text{mit} \quad u_i \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0, \sigma^2), \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

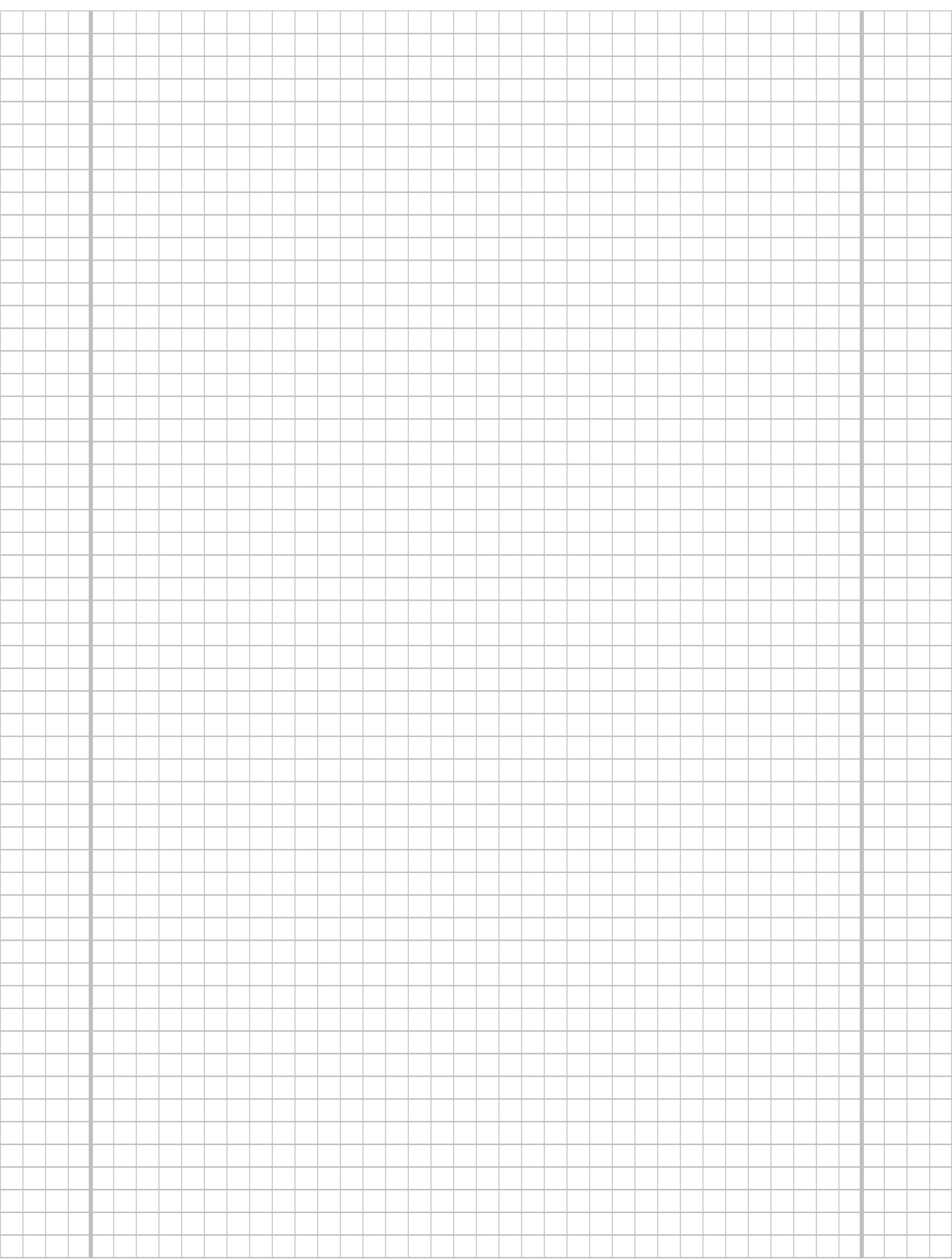
aus einer Stichprobe vom Umfang  $n = 25$  wurden bereits die folgenden Zwischenwerte errechnet:

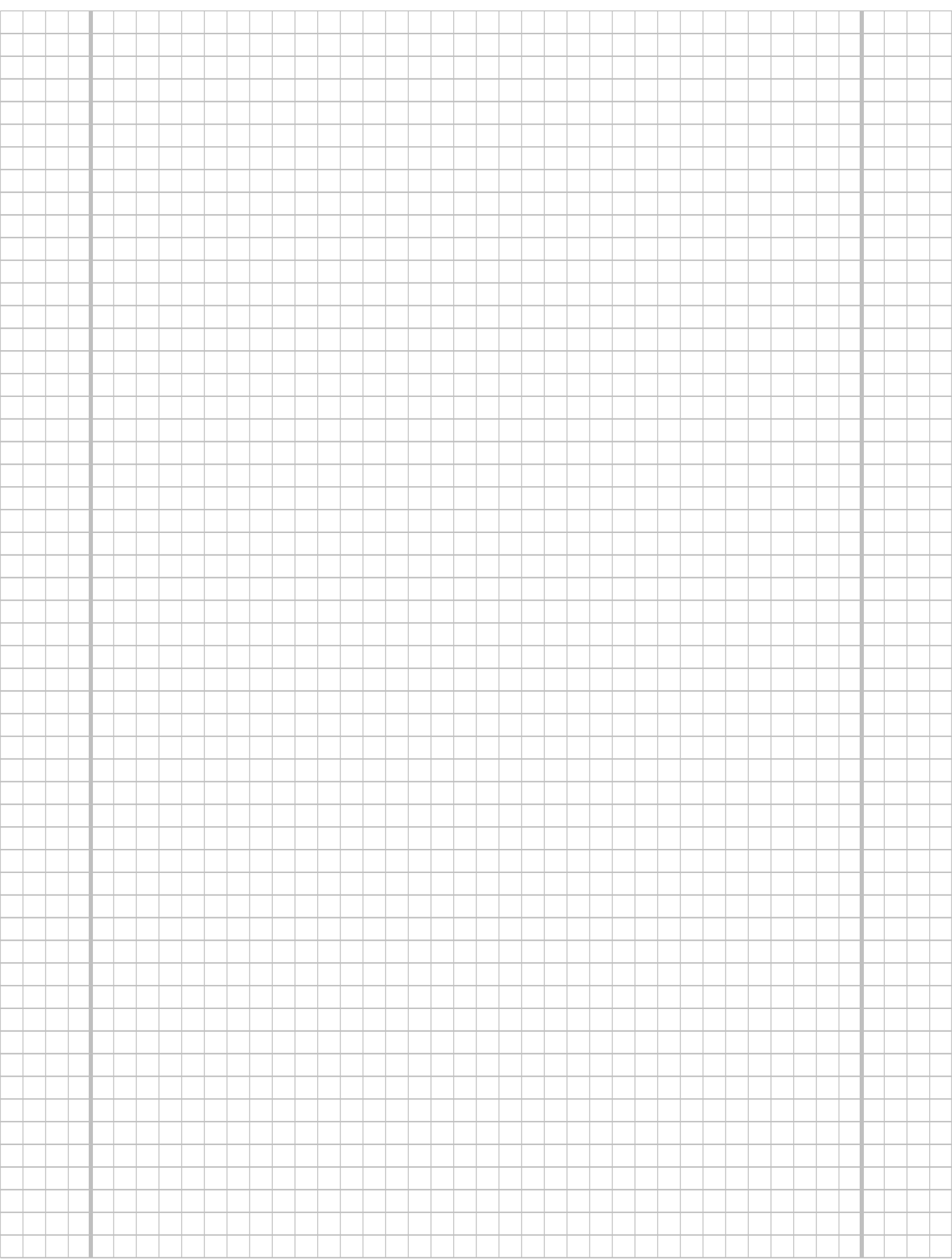
$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{25} y_i &= 81.058; & \sum_{i=1}^{25} y_i^2 &= 494.131; & \sum_{i=1}^{25} x_i &= 113.742; \\ \sum_{i=1}^{25} x_i^2 &= 587.459; & \sum_{i=1}^{25} x_i \cdot y_i &= 309.304 \end{aligned}$$

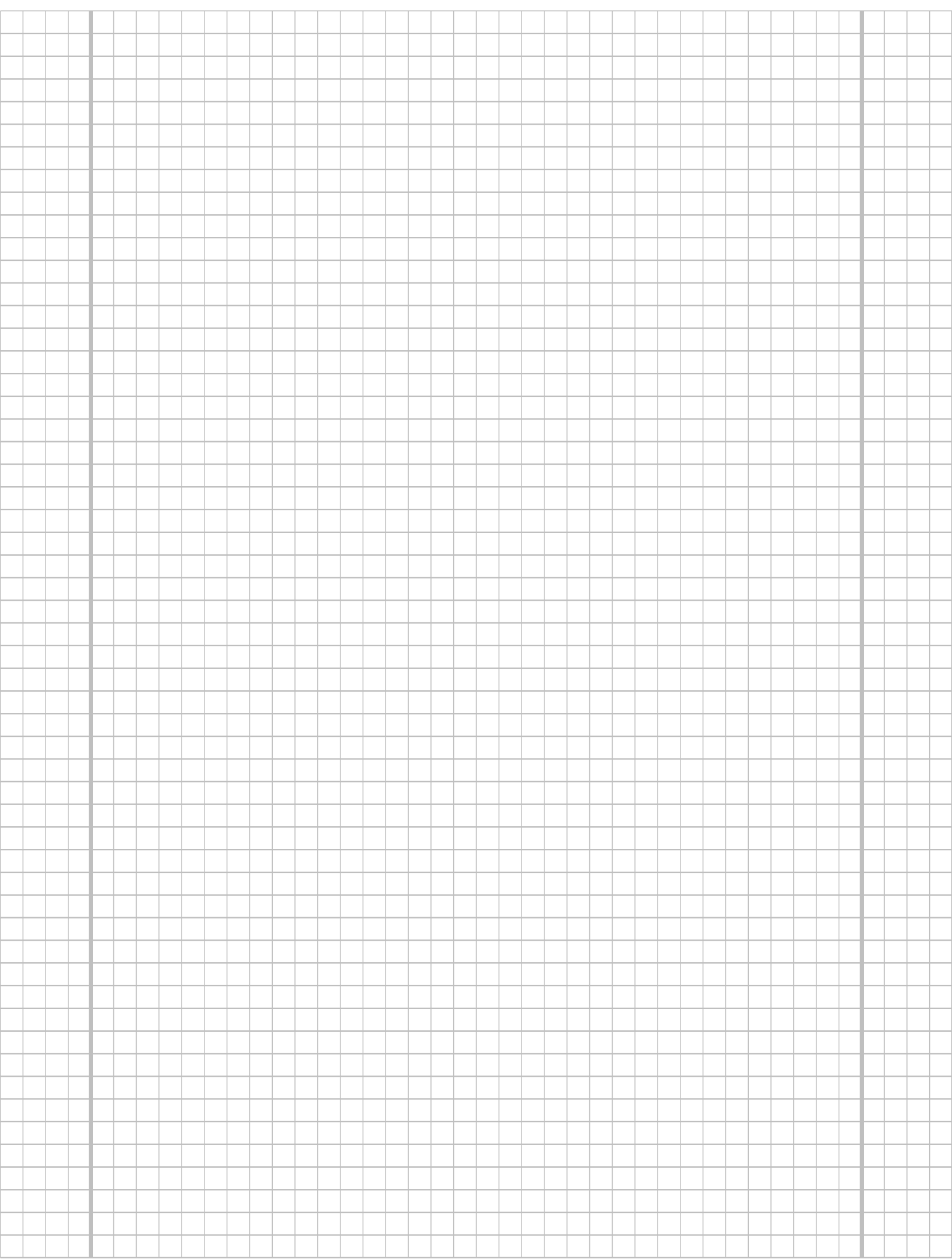
- (a) Schätzen Sie  $\beta_1$  und  $\beta_2$  mit Hilfe der Kleinst-Quadrate-Methode.
- (b) Geben Sie mit Hilfe der bekannten erwartungstreuen Schätzfunktion für  $\sigma^2$  den realisierten Schätzwert für  $\sigma^2$  an.
- (c) Berechnen Sie  $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}^2$  und  $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_2}^2$ .
- (d) Überprüfen Sie zum Signifikanzniveau  $\alpha = 0.05$ , ob  $\beta_2$  signifikant negativ ist. Fassen Sie das Ergebnis auch in einem Antwortsatz zusammen.
- (e) Geben Sie ein Prognoseintervall zur Vertrauenswahrscheinlichkeit  $1 - \alpha = 0.95$  für  $E(y_0)$  gegeben  $x_0 = 3$  an.











### Tabelle zur Standardnormalverteilung

$$F_{N(0,1)}(x) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

$$\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$$

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

### *p*-Quantile der Standardnormalverteilung

$$F_{N(0,1)}(N_p) = p$$

<i>p</i>	0.85	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.9995
<i>N<sub>p</sub></i>	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.291

**$p$ -Quantile der  $t(n)$ -Verteilungen  $t_{n;p}$**

$$T \sim t(n) \Rightarrow F_T(t_{n;p}) = p$$

$n \setminus p$	0.85	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.9995
1	1.963	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	636.619
2	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	31.599
3	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	12.924
4	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	8.610
5	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	6.869
6	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.959
7	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	5.408
8	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	5.041
9	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.781
10	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.587
11	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.437
12	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	4.318
13	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	4.221
14	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	4.140
15	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	4.073
16	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	4.015
17	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.965
18	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.922
19	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.883
20	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.850
21	1.063	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.819
22	1.061	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.792
23	1.060	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.768
24	1.059	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.745
25	1.058	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.725
26	1.058	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.707
27	1.057	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.690
28	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.674
29	1.055	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.659
30	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.646
31	1.054	1.309	1.696	2.040	2.453	2.744	3.633
32	1.054	1.309	1.694	2.037	2.449	2.738	3.622
33	1.053	1.308	1.692	2.035	2.445	2.733	3.611
34	1.052	1.307	1.691	2.032	2.441	2.728	3.601
35	1.052	1.306	1.690	2.030	2.438	2.724	3.591
40	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.551
60	1.045	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.460
80	1.043	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	3.416
100	1.042	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	3.390
120	1.041	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.373
140	1.040	1.288	1.656	1.977	2.353	2.611	3.361
160	1.040	1.287	1.654	1.975	2.350	2.607	3.352
180	1.039	1.286	1.653	1.973	2.347	2.603	3.345
200	1.039	1.286	1.653	1.972	2.345	2.601	3.340
250	1.039	1.285	1.651	1.969	2.341	2.596	3.330