

Wirtschaftswissenschaftliches Prüfungsamt
 BACHELOR-PRÜFUNG
 DESKRIPTIVE STATISTIK UND WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG
 WINTERSEMESTER 2013/14

Namensschild

Dr. Martin Becker

Hinweise für die Klausurteilnehmer

- Kleben Sie bitte **sofort** Ihr Namensschild auf obige Markierung!
- Die Klausur besteht aus insgesamt 10 Aufgaben. Prüfen Sie die Vollständigkeit Ihres Exemplares nach; spätere Reklamationen können nicht berücksichtigt werden.
- Es sind insgesamt 120 Punkte (= 16 + 12 + 11 + 19 + 6 + 10 + 5 + 22 + 9 + 10) erreichbar.
- Als Hilfsmittel sind zugelassen: Taschenrechner (auch mit Grafikfähigkeit), 2 selbstgestellte DIN-A4 Blätter bzw. 4 selbstgestellte (einseitige) DIN-A4 Seiten. Benötigte Tabellen finden Sie am Ende dieses Klausurheftes.
- Bei der Korrektur werden **nur** die Lösungen auf diesen Blättern berücksichtigt.
- Bei mehreren Lösungsvorschlägen muss die gültige Lösung eindeutig gekennzeichnet sein.
- Mit Ausnahme der Multiple-Choice-Aufgaben muss der Lösungsweg klar ersichtlich sein.

Bewertungsteil — Bitte nicht beschreiben						
Aufgabe	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	Σ
1		■	■	■	■	
2		■	■	■	■	
3						
4						
5				■	■	
6				■	■	
7				■	■	
8						
9					■	
10				■	■	
Σ						

Aufgabe 1 (16 Punkte)

Markieren Sie jeweils mit einem Kreuz pro Aussage im betreffenden Kästchen, ob die unten stehenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Richtige Antworten geben +2 Punkte, falsche Antworten -1 Punkt, nicht bearbeitete Aussagen 0 Punkte (Aussagen mit zwei Kreuzen zählen als nicht bearbeitet!).

Die Aufgabe wird insgesamt mit mindestens 0 Punkten bewertet!

- | | wahr | falsch |
|---|--------------------------|--------------------------|
| 1. Der Modus eines kardinalskalierten Merkmals ist stets mindestens so groß wie das arithmetische Mittel des Merkmals. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 2. Bei ordinalskalierten Merkmalen kann es vorkommen, dass nicht jeder Median in der Urliste vorkommt. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 3. Sind $rg(X)$ bzw. $rg(Y)$ die Ränge zu den mindestens ordinalskalierten Merkmalen X bzw. Y , so kann der Spearmansche Rangkorrelationskoeffizient von X und Y als (Bravais-)Pearsonscher Korrelationskoeffizient von $rg(X)$ und $rg(Y)$ berechnet werden. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 4. Es seien (Ω, \mathcal{F}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B \in \mathcal{F}$ zwei Ereignisse mit $P(A) > P(B) > 0$. Dann gilt stets | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| $P(A B) > P(B A) .$ | | |
| 5. Es ist wahrscheinlicher, mit einem fairen (sechseitigen) Würfel zweimal nacheinander eine „Eins“ zu würfeln als mit einer fairen Münze fünfmal nacheinander „Zahl“ zu werfen. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 6. Ist f_X eine Dichtefunktion zu einer stetigen Zufallsvariablen X , so gilt für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ stets | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| $P(\{a < X < b\}) = \int_a^b f_X(x)dx .$ | | |
| 7. Man erhält eine geometrische Verteilung (bzw. deren Realisation), wenn man bei einer wiederholten, unabhängigen Durchführung eines Bernoulli-Experiments die Anzahl der Misserfolge vor dem ersten Erfolg zählt. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 8. Sind X_1, \dots, X_{10} unabhängig identisch verteilte Zufallsvariablen mit Varianz $\sigma^2 > 0$, dann gilt stets | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

$$\text{Var}(X_1 + X_2 + \dots + X_{10}) = \text{Var}(10 \cdot X_1) .$$

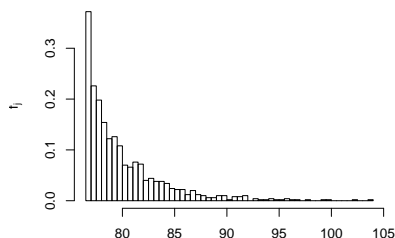
Aufgabe 2 (12 Punkte)

Markieren Sie jeweils die korrekte Antwort mit einem Kreuz im betreffenden Kästchen. Es ist jeweils genau ein Kreuz korrekt.

Richtige Antworten geben +3 Punkte, falsche Antworten -1 Punkt, nicht bearbeitete Aufgabenteile 0 Punkte (Aufgabenteile mit mehr als einem Kreuz zählen als nicht bearbeitet!).

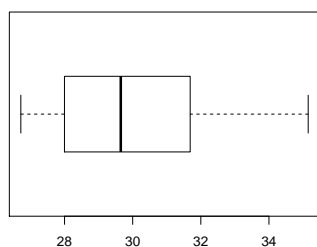
Die Aufgabe wird insgesamt mit mindestens 0 Punkten bewertet!

1. Kreuzen Sie an, auf welche Merkmalseigenschaften das folgende Histogramm *am ehesten* hindeutet:



- (a) leptokurtisch und rechtssteil
- (b) leptokurtisch und linkssteil
- (c) platykurtisch und rechtssteil
- (d) platykurtisch und linkssteil

2. Kreuzen Sie an, auf welche Merkmalseigenschaften der folgende Box-Plot *am ehesten* hindeutet:



- (a) leptokurtisch und rechtssteil
- (b) leptokurtisch und linkssteil
- (c) platykurtisch und rechtssteil
- (d) platykurtisch und linkssteil

3. Der zweidimensionale diskrete Zufallsvektor (X, Y) besitze 10 Trägerpunkte, die alle auf einer Geraden mit Steigung -0.05 liegen. Dann gilt:

- (a) $\text{Korr}(X, Y) = -1$
- (b) $\text{Korr}(X, Y) = -0.5$
- (c) $\text{Korr}(X, Y) = -0.05$
- (d) $\text{Korr}(X, Y) = 0.5$

4. Die Wahrscheinlichkeit, durch eine rein zufällige Aneinanderreihung der Buchstaben E, E, E, M, R, S, S und T das Wort „SEMESTER“ zu erhalten, beträgt:

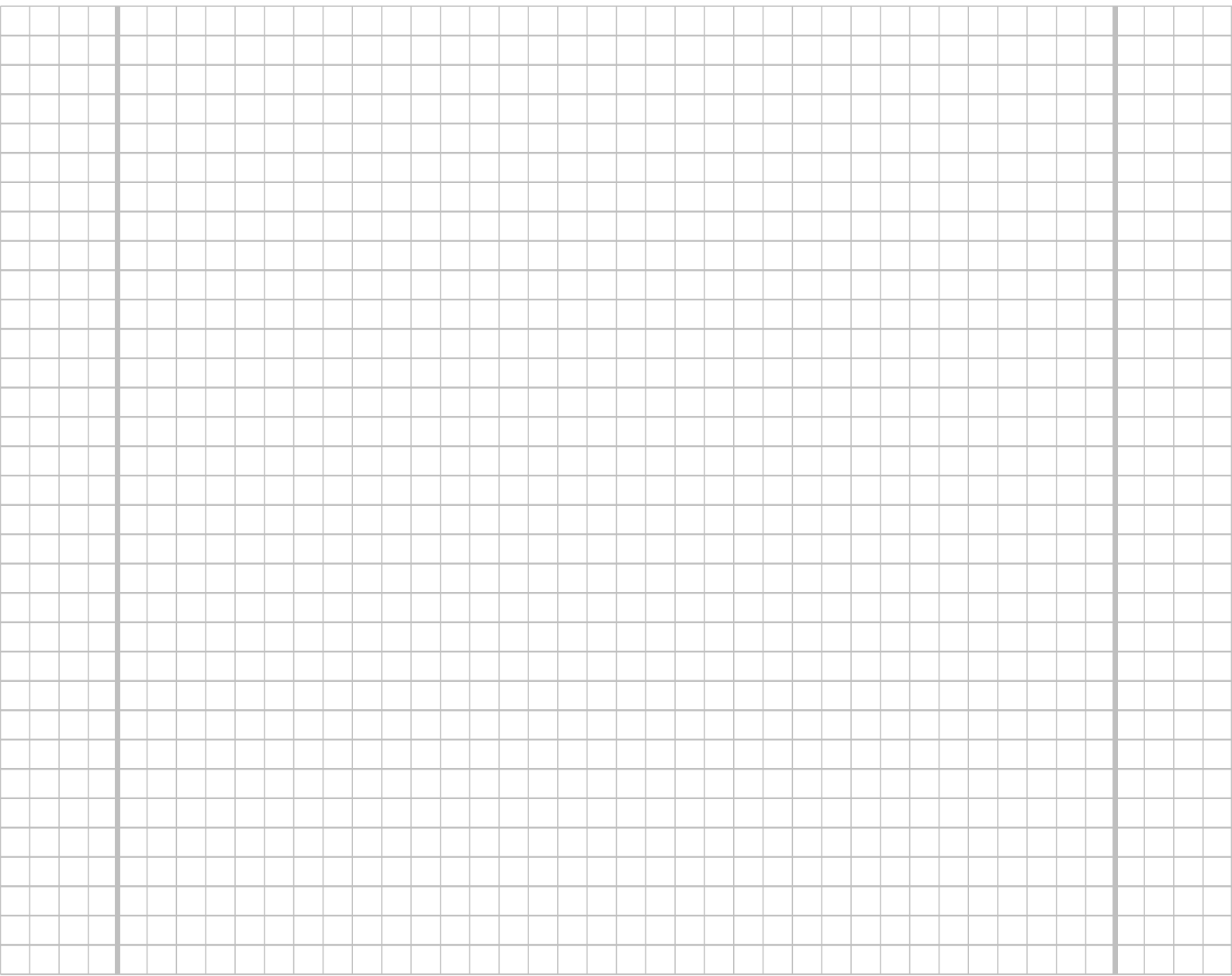
- (a) $\frac{8!}{3! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 2! \cdot 1!}$
- (b) $8!$
- (c) $\frac{1}{8!}$
- (d) $\frac{3! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 2! \cdot 1!}{8!}$

Aufgabe 3 (3 + 3 + 1 + 2 + 2 = 11 Punkte)

Bei einer Umfrage wurden 40 Personen befragt, wie viele Mobiltelefone sie in den vergangenen fünf Jahren gekauft haben (Merkmal X). Das Ergebnis der Umfrage ist die folgende (bereits aufsteigend sortierte) Urliste zu X :

0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4

- (a) Erstellen Sie eine Tabelle mit den absoluten und relativen Häufigkeiten.
- (b) Stellen Sie die zugehörige empirische Verteilungsfunktion auf.
- (c) Wie groß ist der Anteil der Personen in der Umfrage, die mehr als 2 Mobiltelefone in den vergangenen fünf Jahren gekauft haben?
- (d) Berechnen Sie das arithmetische Mittel des Merkmals X .
- (e) Berechnen Sie ein unteres Quartil und ein oberes Quartil des Merkmals X .





Aufgabe 4 (6 + 4 + 3 + 3 + 3 = 19 Punkte)

Zu einem kardinalskalierten Merkmal sei die folgende (zur einfacheren Bearbeitung der Aufgabe bereits sortierte) Urliste der Länge $n = 40$ gegeben:

14.97, 17.77, 18.70, 19.66, 22.00, 22.19, 22.49, 23.45, 25.07, 29.85, 32.83, 33.72, 33.94, 34.72, 35.19, 35.72, 36.62, 36.81, 38.61, 38.93, 39.10, 39.60, 39.80, 40.22, 40.28, 40.92, 41.25, 41.90, 42.29, 42.35, 43.03, 44.10, 44.22, 45.17, 46.35, 46.51, 46.61, 46.86, 47.42, 48.27

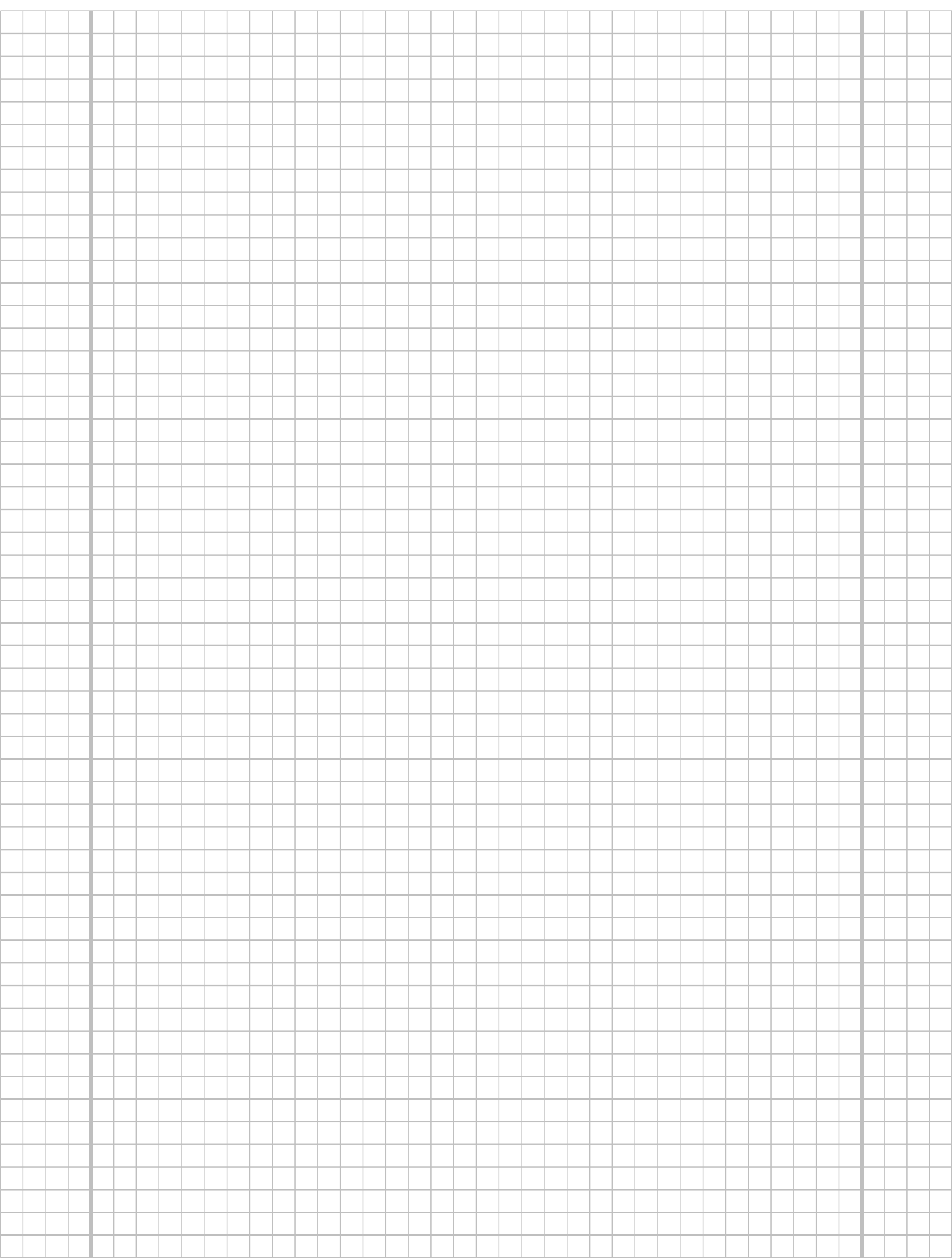
- (a) Führen Sie eine Klassierung der erhobenen Daten auf Grundlage der Klassen

$$K_1 = (10, 30], K_2 = (30, 40], K_3 = (40, 45], K_4 = (45, 50]$$

durch. Geben Sie insbesondere die jeweiligen Klassenbreiten, Klassenmitten, absoluten und relativen Klassenhäufigkeiten, Häufigkeitsdichten sowie die Werte der empirischen Verteilungsfunktion an den Klassengrenzen an.

- (b) Stellen Sie die (approximative) empirische Verteilungsfunktion des Merkmals aus der Klassierung der Daten auf.
- (c) Berechnen Sie aus den klassierten Daten den (approximativen) arithmetischen Mittelwert der Daten. Wie groß ist die relative Abweichung vom tatsächlichen (aus der Urliste bestimmten) Mittelwert von 35.987?
- (d) Bestimmen Sie (aus der Urliste) die Anzahl von Merkmalswerten zwischen 20 und 40. Welche Näherung für diese Anzahl können Sie aus der in Teil (b) aufgestellten empirischen Verteilungsfunktion berechnen?
- (e) Bestimmen Sie (unter Verwendung der bekannten Konvention zur eindeutigen Festlegung von Quantilen bei kardinalskalierten Merkmalen) *das* obere Quartil sowohl exakt aus der Urliste als auch approximativ mit Hilfe der Verteilungsfunktion für die klassierten Daten.







Aufgabe 5 (2 + 2 + 2 = 6 Punkte)

Bei der Herstellung von Deckenpaneelen tritt mit einer Wahrscheinlichkeit von 1% ein Fehler beim Zuschnitt der Paneele auf, mit einer Wahrscheinlichkeit von 2% ein Fehler beim Laminieren der Paneele und mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.5% sowohl ein Fehler beim Zuschnitt der Paneele als auch ein Fehler beim Laminieren der Paneele. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

- (a) höchstens einer der beiden Fehler,
- (b) mindestens einer der beiden Fehler,
- (c) ein Fehler beim Zuschnitt der Paneele, aber kein Fehler beim Laminieren der Paneele auftritt.





Aufgabe 6 (6 + 2 + 2 = 10 Punkte)

Ein Versandhaus beauftragt für den Versand seiner Sendungen einen von insgesamt vier verschiedenen Versand-Dienstleistern A, B, C und D. Dabei werden durchschnittlich 30% der Sendungen an Dienstleister A, 30% der Sendungen an Dienstleister B, 20% der Sendungen an Dienstleister C und 20% der Sendungen an Dienstleister D übergeben. Die umfangreiche Auswertung der vorhandenen Kunden-Feedbacks zu Qualität und Geschwindigkeit der Lieferung ergab, dass 96% der Lieferungen mit Dienstleister A, 97% der Lieferungen mit Dienstleister B, 96% der Lieferungen mit Dienstleister C und 98% der Lieferungen mit Dienstleister D nicht beanstandet werden.

- (a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Sendung einen Anlass zur Beanstandung durch den Kunden bietet?
- (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine nicht beanstandete Lieferung mit Dienstleister C versendet wurde?
- (c) Sind die Ereignisse „Lieferung wird beanstandet“ bzw. „Dienstleister C war mit dem Versand beauftragt“ stochastisch unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort!

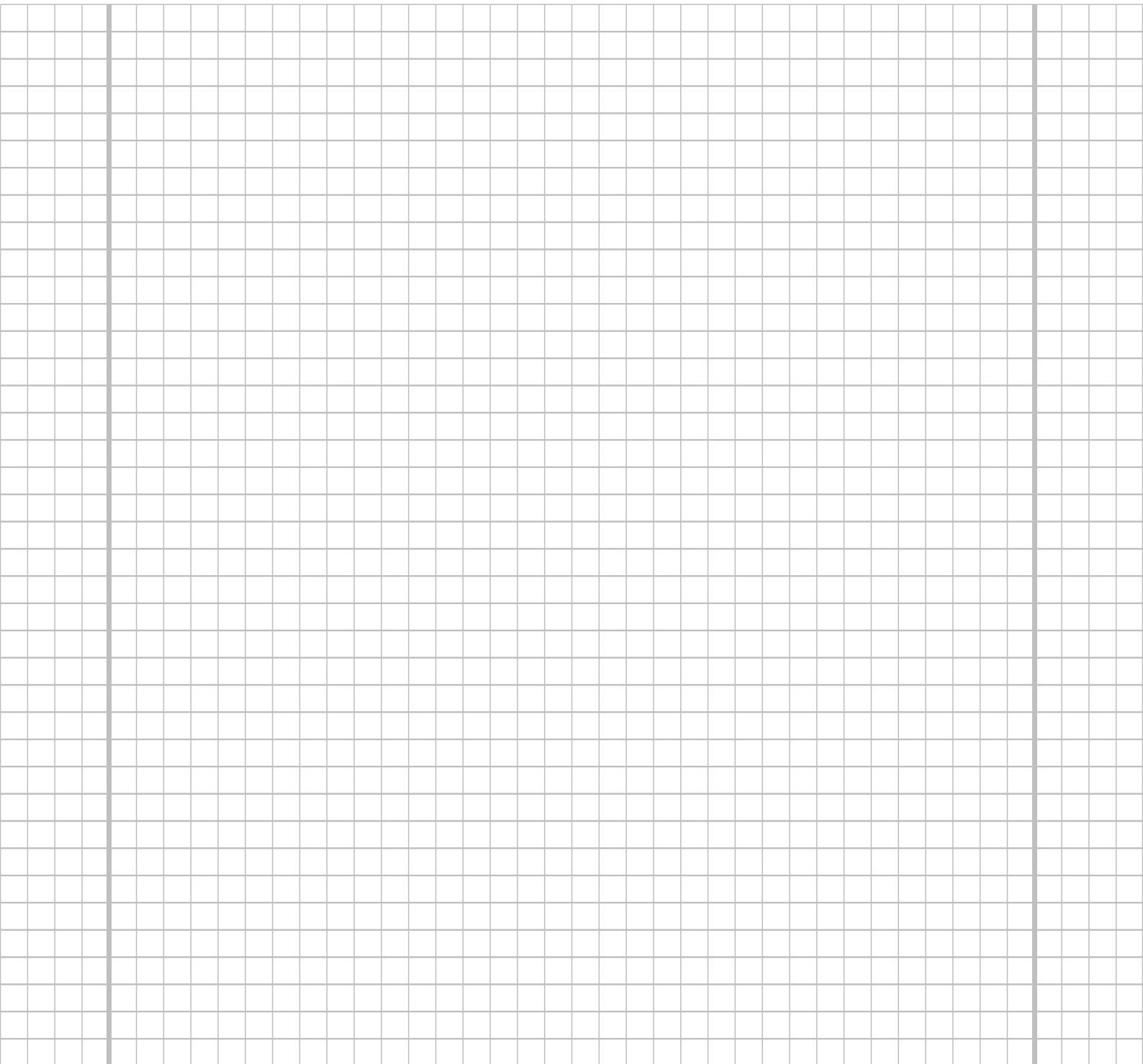




Aufgabe 7 (2 + 1 + 2 = 5 Punkte)

Die Wartezeit zwischen zwei Anrufen in einer Störmeldezentrale lasse sich als eine exponentialverteilte Zufallsvariable auffassen. Im Mittel vergehen zwischen zwei Anrufen 0.5 Stunden.

- (a) Welche Standardabweichung hat die Wartezeit zwischen zwei Anrufen?
- (b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit beträgt die Wartezeit zwischen zwei Anrufen mehr als 0.5 und weniger als 1.5 Stunden?
- (c) Berechnen Sie das 0.90-Quantil der Wartezeit zwischen zwei Anrufen.



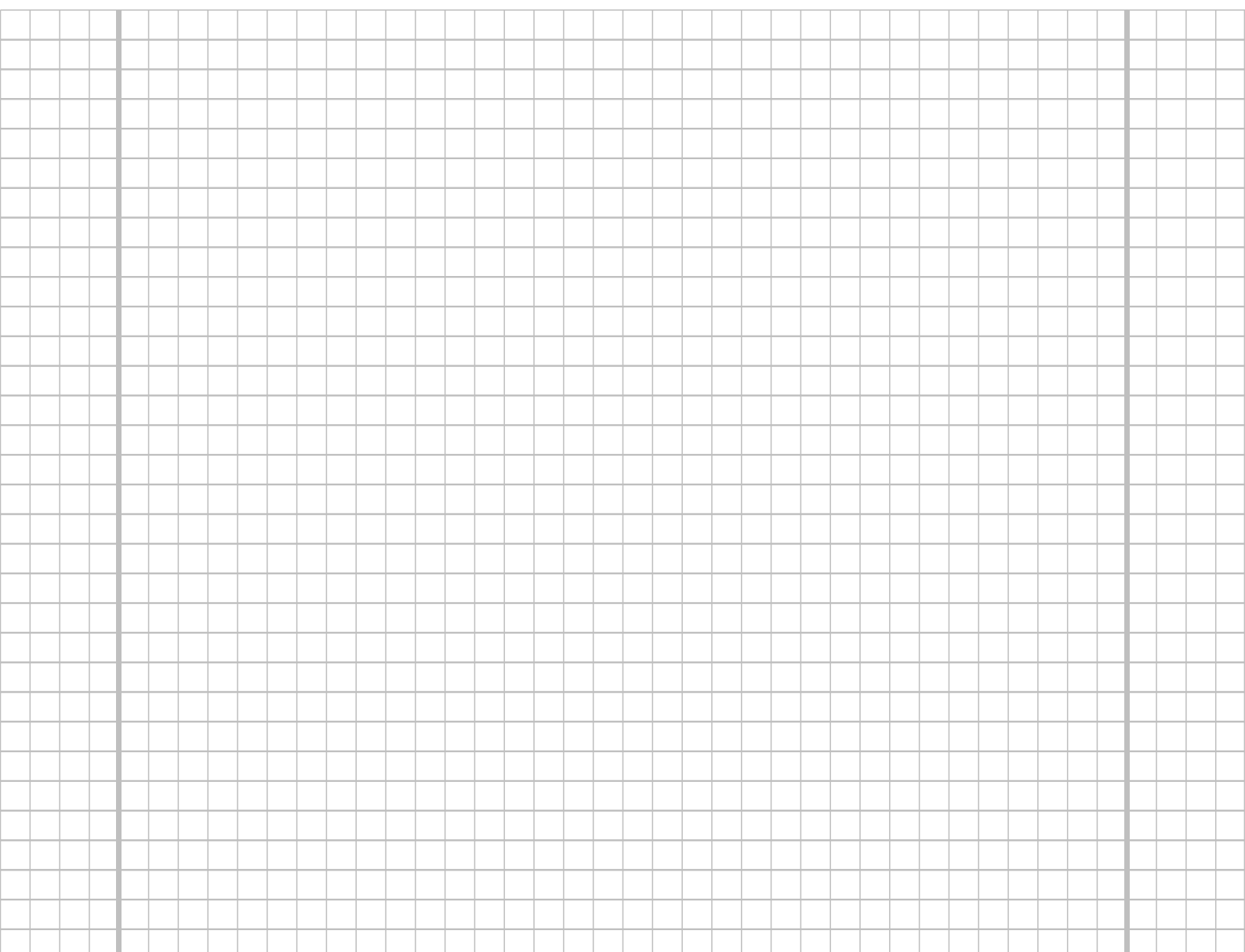


Aufgabe 8 (3 + 2 + 12 + 1 + 4 = 22 Punkte)

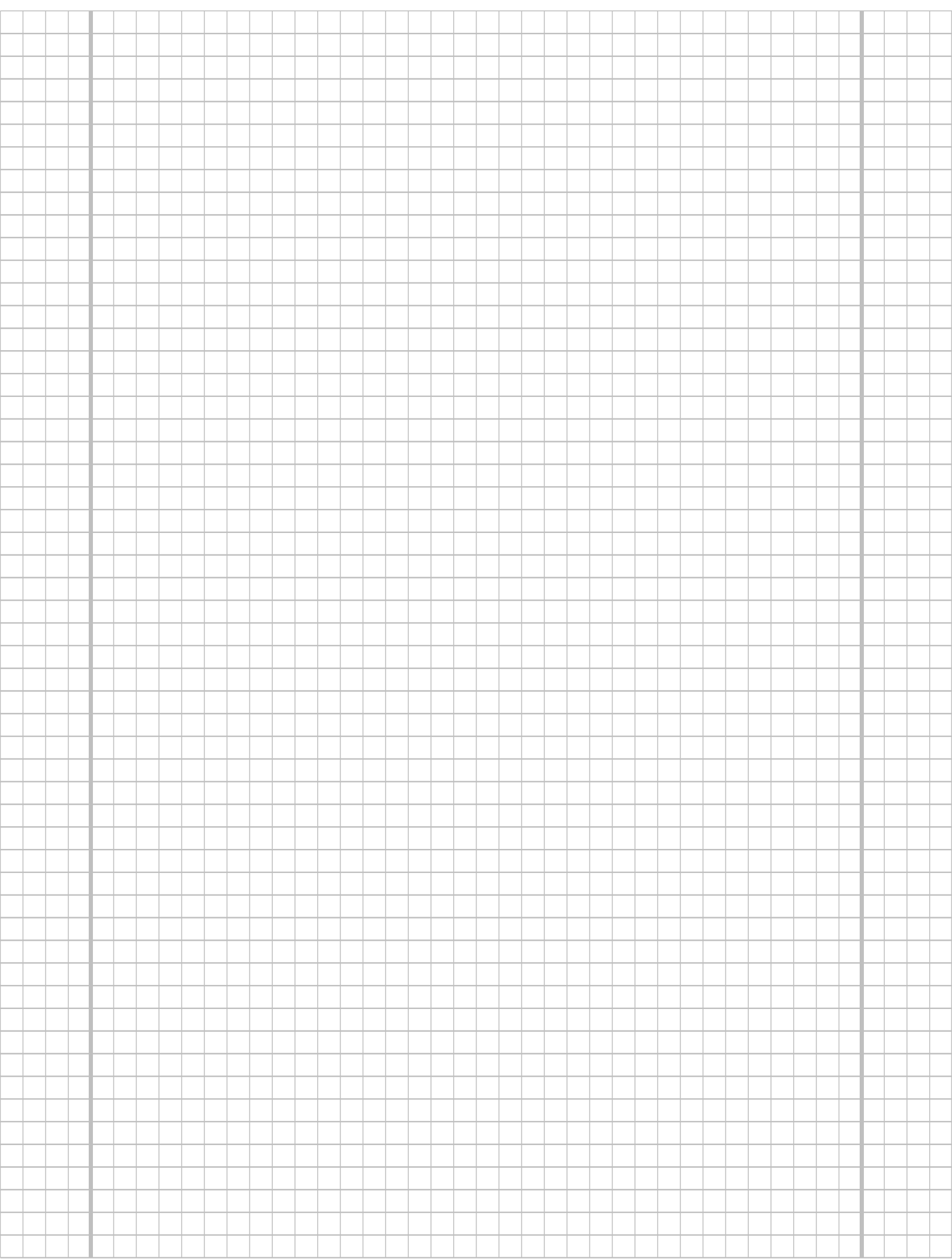
Die Verteilung einer stetigen Zufallsvariablen X sei durch die folgende Verteilungsfunktion gegeben:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq -2 \\ \frac{1}{24}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{2} & \text{für } -2 < x \leq 0 \\ \frac{1}{24}x^2 + \frac{1}{6}x + \frac{1}{2} & \text{für } 0 < x \leq 2 \\ 1 & \text{für } x > 2 \end{cases}$$

- (a) Berechnen Sie eine Dichtefunktion f_X von X .
- (b) Berechnen Sie $P(\{X < -1\})$ und $P(\{-1 < X < 1\})$.
- (c) Bestimmen Sie den Erwartungswert $E(X)$ und die Varianz $\text{Var}(X)$.
- (d) Ist X symmetrisch um ihren Erwartungswert verteilt (ohne Begründung)?
- (e) Bestimmen Sie das untere Quartil von X .









Aufgabe 9 (2 + 3 + 1 + 3 = 9 Punkte)

Gegeben sei die folgende Tabelle der gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsverteilung zu einem zweidimensionalen diskreten Zufallsvektor (X, Y) :

$X \setminus Y$	0	1	4	$p_{i\cdot}$
1	0.05	0.1	0.05	
2	0.1	0.1	0.2	
3	0.15	0.1	0.15	
$p_{\cdot j}$				

(a) Ergänzen Sie die obige Tabelle (in den vorgesehenen Feldern) um ihre Randverteilungen.

(b) Berechnen Sie mit Hilfe der Zwischenergebnisse

$$E(X) = 2.2, E(Y) = 1.9, E(X^2) = 5.4, E(Y^2) = 6.7 \text{ und } E(X \cdot Y) = 4.2$$

die Größen $\text{Var}(X)$, $\text{Var}(Y)$, $\text{Cov}(X, Y)$ sowie $\text{Korr}(X, Y)$.

(c) Sind X und Y stochastisch unabhängig?

(d) Berechnen Sie $E(3X - 4Y)$ sowie $\text{Var}(3X - 4Y)$.





Aufgabe 10 (2 + 4 + 4 = 10 Punkte)

Ein Holzschnitzer stellt Weihnachtsfiguren als Unikate in Handarbeit her. Aus langjähriger Erfahrung weiß er, dass er pro Figur im Mittel 1.2 Stunden bei einer Standardabweichung von 0.4 Stunden benötigt. Man kann davon ausgehen, dass die einzelnen Herstellungszeiten nicht gegenseitig voneinander abhängen. In einem bestimmten Jahr nimmt der Schnitzer vor Weihnachten Bestellungen über insgesamt 100 Figuren an.

- (a) Geben Sie die den Erwartungswert sowie die Standardabweichung der gesamten Herstellungszeit (für alle 100 Figuren) an.
- (b) Verwenden Sie den zentralen Grenzwertsatz, um näherungsweise zu bestimmen, mit welcher Wahrscheinlichkeit der Schnitzer insgesamt zwischen 110 und 125 Stunden zur Herstellung aller Figuren benötigt.
- (c) Verwenden Sie den zentralen Grenzwertsatz, um näherungsweise ein 0.975-Quantil für die gesamte Herstellungszeit (für alle 100 Figuren) zu bestimmen.

Hinweis: Verwenden Sie zur Bearbeitung von Aufgabenteil (b) und (c) die Tabelle zur Standardnormalverteilung auf Seite 25!

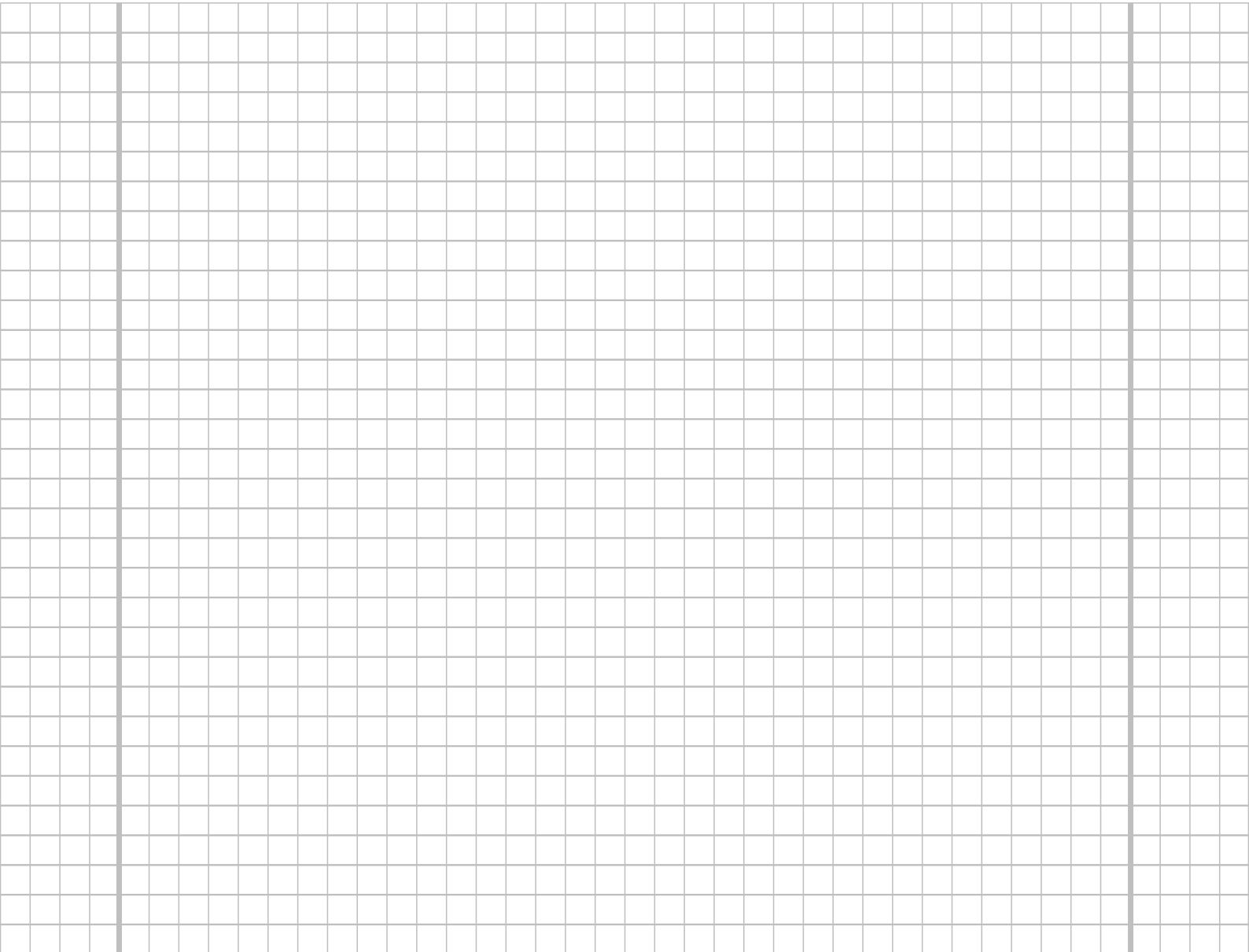




Tabelle zur Standardnormalverteilung

$$F_{N(0,1)}(x) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

$$\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$$

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998