

Wirtschaftswissenschaftliches Prüfungsamt
 BACHELOR-PRÜFUNG
 DESKRIPTIVE STATISTIK UND WAHRSCHEINLICKEITSRECHNUNG
 WINTERSEMESTER 2011/12

Namensschild

Dr. Martin Becker

Hinweise für die Klausurteilnehmer

- Kleben Sie bitte **sofort** Ihr Namensschild auf obige Markierung!
- Die Klausur besteht aus insgesamt 9 Aufgaben. Prüfen Sie die Vollständigkeit Ihres Exemplares nach; spätere Reklamationen können nicht berücksichtigt werden.
- Es sind insgesamt 120 Punkte (= 16 + 12 + 12 + 16 + 6 + 8 + 26 + 15 + 9) erreichbar.
- Als Hilfsmittel sind zugelassen: Taschenrechner (auch mit Grafikfähigkeit), 2 selbsterstellte DIN-A4 Blätter bzw. 4 selbsterstellte (einseitige) DIN-A4 Seiten. Benötigte Tabellen finden Sie am Ende dieses Klausurheftes.
- Bei der Korrektur werden **nur** die Lösungen auf diesen Blättern berücksichtigt.
- Bei mehreren Lösungsvorschlägen muss die gültige Lösung eindeutig gekennzeichnet sein.
- Mit Ausnahme der Multiple-Choice-Aufgaben muss der Lösungsweg klar ersichtlich sein.

Bewertungsteil — Bitte nicht beschreiben						
Aufgabe	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	Σ
1		■	■	■	■	
2		■	■	■	■	
3						
4					■	
5				■	■	
6			■	■	■	
7						
8					■	
9				■	■	
Σ						

Aufgabe 1 (16 Punkte)

Markieren Sie jeweils mit einem Kreuz pro Aussage im betreffenden Kästchen, ob die unten stehenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Richtige Antworten geben +2 Punkte, falsche Antworten –1 Punkt, nicht bearbeitete Aussagen 0 Punkte (Aussagen mit zwei Kreuzen zählen als nicht bearbeitet!).

Die Aufgabe wird insgesamt mit mindestens 0 Punkten bewertet!

- | | wahr | falsch |
|---|--------------------------|--------------------------|
| 1. Der (einzige) Modalwert a_{mod} der Urliste
$3, 2, 6, 4, 5, 2, 7, 5, 2$
ist $a_{\text{mod}} = 2$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 2. Empirische Verteilungsfunktionen F sind stets streng monoton wachsende Funktionen. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 3. Der Pearsonsche Kontingenzkoeffizient kann nur die Stärke, nicht aber die Richtung der Abhängigkeit zwischen zwei Merkmalen messen. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 4. Sei (Ω, \mathcal{F}, P) ein beliebiger Wahrscheinlichkeitsraum. Dann gilt $P(A) + P(\bar{A}) = 1$ für jedes Ereignis $A \in \mathcal{F}$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 5. Es seien (Ω, \mathcal{F}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum, $A, B, C \in \mathcal{F}$ drei Ereignisse mit $P(C) > 0$. Dann gilt stets:
$P(A C) + P(B C) \leq P(C)$ | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 6. Wenn Sie in dieser Aufgabe jeden Aufgabenteil dadurch bearbeiten, dass Sie eine faire Münze (mit Zahl und Wappen) werfen und bei Zahl “wahr” sowie bei Wappen “falsch” ankreuzen, dann ist die Anzahl Ihrer korrekten Antworten $B(8, 0.5)$ -verteilt. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 7. Verteilungsfunktionen stetiger Zufallsvariablen sind stets stetig. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 8. Sind X und Y zwei Zufallsvariablen über einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) und $a, b \in \mathbb{R}$, so gilt stets:
$E(a \cdot X + b \cdot Y) = a \cdot E(X) + b \cdot E(Y) + 2 \cdot a \cdot b \cdot E(X \cdot Y)$ | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

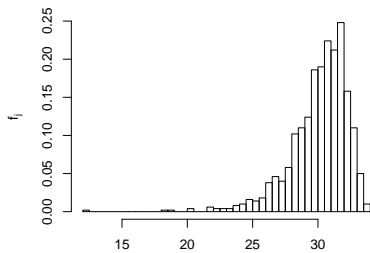
Aufgabe 2 (12 Punkte)

Markieren Sie jeweils die korrekte Antwort mit einem Kreuz im betreffenden Kästchen. Es ist jeweils genau ein Kreuz korrekt.

Richtige Antworten geben +3 Punkte, falsche Antworten -1 Punkt, nicht bearbeitete Aufgabenteile 0 Punkte (Aufgabenteile mit mehr als einem Kreuz zählen als nicht bearbeitet!).

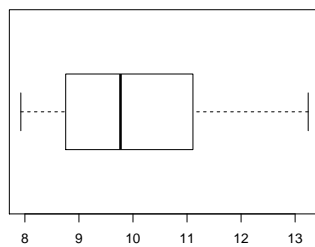
Die Aufgabe wird insgesamt mit mindestens 0 Punkten bewertet!

1. Kreuzen Sie an, auf welche Merkmalseigenschaften das folgende Histogramm *am ehesten* hindeutet:



- (a) leptokurtisch und linksschief
- (b) leptokurtisch und rechtsschief
- (c) platykurtisch und linksschief
- (d) platykurtisch und rechtsschief

2. Kreuzen Sie an, auf welche Merkmalseigenschaften der folgende Box-Plot *am ehesten* hindeutet:



- (a) leptokurtisch und linksschief
- (b) leptokurtisch und rechtsschief
- (c) platykurtisch und linksschief
- (d) platykurtisch und rechtsschief

3. Es sei (Ω, \mathcal{F}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum mit $\Omega = \{\text{“rot”}, \text{“grün”}, \text{“blau”}\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ und der Laplace-Wahrscheinlichkeit P . In dieser Situation ist

- (a) “grün” ein Ergebnis und $\{\text{“rot”}, \text{“blau”}\}$ ein Ergebnis
- (b) “grün” ein Ergebnis und $\{\text{“rot”}, \text{“blau”}\}$ ein Ereignis
- (c) “grün” ein Ereignis und $\{\text{“rot”}, \text{“blau”}\}$ ein Ergebnis
- (d) “grün” ein Ereignis und $\{\text{“rot”}, \text{“blau”}\}$ ein Ereignis

4. Die 5-stellige Gewinnzahl einer Lotterie wird durch Ziehen **mit Zurücklegen unter Berücksichtigung der Reihenfolge** aus den Ziffern $\{1, 2, \dots, 9\}$ gebildet. Dann beträgt die Anzahl der möglichen Gewinnzahlen insgesamt:

- (a) 9^5
- (b) 5^9
- (c) $\frac{9!}{5!}$
- (d) $\binom{9}{5}$

Aufgabe 3 (3 + 3 + 1 + 2 + 3 = 12 Punkte)

Bei einer Umfrage wurden 25 Internetnutzer befragt, an wie vielen der vergangenen 3 Tage sie das Internet länger als eine Stunde genutzt haben (Merkmal X). Das Ergebnis der Umfrage ist die folgende (bereits aufsteigend sortierte) Urliste zu X :

0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3

- (a) Erstellen Sie eine Tabelle mit den absoluten und relativen Häufigkeiten.
- (b) Stellen Sie die zugehörige empirische Verteilungsfunktion auf.
- (c) Wie groß ist der Anteil der Internetnutzer in der Umfrage, die das Internet mindestens an 2 der vergangenen 3 Tage länger als eine Stunde genutzt haben?
- (d) Berechnen Sie die mittlere Anzahl von Tagen mit einer Internetnutzungsdauer von mindestens einer Stunde.
- (e) Berechnen Sie das untere und obere Quartil des Merkmals X sowie den zugehörigen Interquartilsabstand.

Aufgabe 4 (6 + 3 + 4 + 3 = 16 Punkte)

Zu einem kardinalskalierten Merkmal sei die folgende (zur einfacheren Bearbeitung der Aufgabe bereits sortierte) Urliste der Länge $n = 25$ gegeben:

13.77, 33.84, 36.09, 36.54, 37.38, 40.68, 48.04, 49.22, 50.69, 53.07, 53.57, 55.95,
56.21, 57.51, 60.89, 62.12, 62.22, 62.98, 63.84, 63.99, 65.44, 66.10, 67.49, 67.74,
68.08

- (a) Führen Sie eine Klassierung der erhobenen Daten auf Grundlage der Klassen

$$K_1 = (10, 30], K_2 = (30, 50], K_3 = (50, 60], K_4 = (60, 70]$$

durch. Geben Sie insbesondere die jeweiligen Klassenbreiten, Klassenmitten, absoluten und relativen Klassenhäufigkeiten, Häufigkeitsdichten sowie die Werte der empirischen Verteilungsfunktion an den Klassengrenzen an.

- (b) Berechnen Sie aus den klassierten Daten den (approximativen) arithmetischen Mittelwert der Daten. Wie groß ist die relative Abweichung vom tatsächlichen (aus der Urliste bestimmten) Mittelwert von 53.338?
- (c) Stellen Sie die (approximative) empirische Verteilungsfunktion des Merkmals aus der Klassierung der Daten auf.
- (d) Bestimmen Sie (aus der Urliste) die Anzahl von Merkmalswerten zwischen 20 und 50. Welche Näherung für diese Anzahl können Sie aus der in Teil (c) aufgestellten empirischen Verteilungsfunktion berechnen?

Aufgabe 5 (2 + 2 + 2 = 6 Punkte)

Eine Lostrommel enthält 25 (gleichartige) Kugeln, die von 1 bis 25 durchnummeriert sind. Es wird einmalig rein zufällig eine der 25 Kugeln gezogen.

- (a) Geben Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum zur Beschreibung dieses Zufallsexperiments an.
- (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, eine Kugel mit einer geraden Zahl zu ziehen? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, eine Kugel mit einer Zahl kleiner oder gleich 10 zu ziehen?
- (c) Sind die Ereignisse „Kugel mit einer geraden Zahl“ und „Kugel mit einer Zahl kleiner oder gleich 10“ aus Teil (b) stochastisch unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 6 (6 + 2 = 8 Punkte)

Ein Hersteller von Tiefkühlfertiggerichten bezieht seine Frischfischlieferungen von den vier Großhändlern A, B, C und D. Dabei werden einzelne Lieferungen mit einer Wahrscheinlichkeit von 40% von Lieferant A, 25% von Lieferant B, 20% von Lieferant C und 15% von Lieferant D geliefert. Bei den anschließenden Qualitätskontrollen gibt es erfahrungsgemäß mit einer Wahrscheinlichkeit von 2% bei Lieferant A, 2% bei Lieferant B, 3% bei Lieferant C und 5% bei Lieferant D Anlass zu Beanstandungen.

- (a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgefählte Lieferung in der Qualitätskontrolle beanstandet wird?
- (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine von der Qualitätskontrolle beanstandete Lieferung von Großhändler B geliefert wurde?

Aufgabe 7 (6 + 2 + 12 + 4 + 2 = 26 Punkte)

Die Verteilung einer stetigen Zufallsvariablen X sei durch die folgende Dichtefunktion gegeben:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}x + \frac{1}{3} & \text{für } -2 \leq x < 0 \\ -\frac{1}{6}x + \frac{1}{2} & \text{für } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- (a) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion F_X von X .
- (b) Berechnen Sie $P(\{X < -1\})$ sowie $P(\{X > \frac{1}{2}\})$.
- (c) Bestimmen Sie den Erwartungswert $E(X)$ und die Varianz $\text{Var}(X)$.
- (d) Bestimmen Sie ein oberes Quartil von X .
- (e) Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz von $Y := 3 \cdot X - 4$.

Aufgabe 8 (2 + 9 + 1 + 3 = 15 Punkte)

Gegeben sei die folgende Tabelle der gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsverteilung zu einem zweidimensionalen diskreten Zufallsvektor (X, Y) :

$X \setminus Y$	0	2	4	$p_{i\cdot}$
1	0.05	0.15	0.1	
3	0.2	0.35	0.15	
$p_{\cdot j}$				

- (a) Ergänzen Sie die obige Tabelle (in den vorgesehenen Feldern) um ihre Randverteilungen.
- (b) Berechnen Sie $E(X)$, $E(Y)$, $\text{Var}(X)$, $\text{Var}(Y)$, $\text{Cov}(X, Y)$ sowie $\text{Korr}(X, Y)$.
- (c) Sind X und Y stochastisch unabhängig?
- (d) Berechnen Sie $E(2X - 4Y)$ sowie $\text{Var}(2X - 4Y)$.

Aufgabe 9 (1 + 4 + 4 = 9 Punkte)

In einem Hotel mit 400 Zimmern können Zimmerreservierungen bis zum Anreisetag kostenlos storniert werden. Man weiß aus Erfahrung, dass im Mittel 15% der reservierten Zimmer tatsächlich kurzfristig storniert werden. Um die Zahl der freien Zimmer möglichst gering zu halten, nimmt das Hotel daher mehr Zimmerreservierungen an als Zimmer im Hotel vorhanden sind.

- (a) Wie ist die Anzahl Y der tatsächlich wegen Reservierungen benötigten (also nicht stornierten) Zimmer verteilt, wenn insgesamt 450 Zimmerreservierungen angenommen wurden und davon ausgegangen werden kann, dass das Stornierungsverhalten der Hotelgäste voneinander unabhängig ist?
- (b) Berechnen Sie unter Verwendung des zentralen Grenzwertsatzes die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei 450 angenommenen Reservierungen genügend Zimmer zur Verfügung stehen, um alle Hotelgäste, die reserviert und nicht storniert haben, auch im Hotel unterzubringen.
- (c) Verwenden Sie den zentralen Grenzwertsatz, um näherungsweise ein 0.95-Quantil der Anzahl in Anspruch genommener Zimmerreservierungen Y zu bestimmen.

Hinweis: Verwenden Sie zur Bearbeitung von Aufgabenteil (b) und (c) die Tabelle zur Standardnormalverteilung auf Seite 23!

Tabelle zur Standardnormalverteilung

$$F_{N(0,1)}(x) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

$$\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$$

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998