Universität des Saarlandes
Lehrstab Statistik
apl. Prof. Dr. Martin Becker

5. Übungsblatt zur Vorlesung
Schließende Statistik WS 2024/25

Aufgabe 16

Um den Bekanntheitsgrad eines neu eingeführten Produkts zu untersuchen, befragt ein Marktforschungsinstitut 500 zufällig ausgewählte Personen. Von den 500 befragten gaben 373 Personen an, das Produkt zu kennen. Geben Sie ein (symmetrisches) Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau $1-\alpha = 0.90$ für den Bekanntheitsgrad (Anteil der Bevölkerung, dem das Produkt bekannt ist) an.
Hinweis: Verwenden Sie den folgenden Ausschnitt aus der Tabelle für gängige Quantile der t-Verteilungen.

$n \backslash p$	0.85	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.9995
499	1.038	1.283	1.648	1.965	2.334	2.586	3.310

Aufgabe 17

Zur Erstellung von Hochrechnungen zu Wahlergebnissen in Form von (symmetrischen) Konfidenzintervallen für den Wähleranteil p einer bestimmten Partei (mit $0 < p < 1$) plant ein Meinungsforschungsinstitut die Durchführung einer Befragung von zufällig ausgewählten Wählern vor Wahllokalen. Dabei soll die Breite des Konfidenzintervalls für den Wähleranteil p zum Konfidenzniveau $1-\alpha = 0.95$ den Wert 0.02 (also 2 Prozentpunkte) nicht überschreiten.
Hinweis: Verwenden Sie als Näherung der Quantile der t-Verteilung in dieser Aufgabe die entsprechenden Quantile der Standardnormalverteilung!

(a) Geben Sie die Breite $\widehat{b}$ der Konfidenzintervalle zum Niveau $1-\alpha = 0.95$ für den Wähleranteil p in Abhängigkeit des Stichprobenumfangs sowie des geschätzten Wähleranteils $\widehat{p}$ an.

(b) Welcher Wert von $\widehat{p}$ führt in Teil (a) bei festem Stichprobenumfang zur größten Breite des Konfidenzintervalls?

(c) Wie groß muss (unter Berücksichtigung von Teil (b)) der Stichprobenumfang n mindestens gewählt werden, damit auf jeden Fall garantiert ist, dass die Breite des Konfidenzintervalls den Wert 0.02 nicht überschreitet?

(d) Angenommen, der aus einer Stichprobe vom in Teil (c) bestimmten Mindestumfang geschätzte Wähleranteil beragt $\widehat{p} = 0.083$. Wie breit ist dann das resultierende Konfidenzintervall zum Niveau $1-\alpha = 0.95$?

Aufgabe 18

In einem milchverarbeitenden Betrieb wird Joghurt hergestellt und in Becher mit einem Soll-Inhalt von 150 [g] abgefüllt. Die tatsächlich abgefüllten Mengen Y unterliegen jedoch produktionsbedingt zufälligen Schwankungen, die als normalverteilt mit einer Standardabweichung von 2 [g] angesehen werden sollen. Während die Korrektheit dieser Standardabweichung als gesichert gilt, besteht Unsicherheit darüber, ob die im Mittel abgefüllte Menge (also der tatsächliche Erwartungswert von Y) dem Soll-Inhalt von 150 [g] entspricht oder von diesem Soll-Inhalt abweicht.

Mit einer statistischen Warenausgangskontrolle soll daher die korrekte Justierung der Abfüllanlage überprüft werden. Hierzu werden aus einer Tagesproduktion 9 Joghurtbecher zufällig ausgewählt. Die anschließend gemessenen Inhalte $x_1, \ldots, x_9$ der Joghurtbecher sollen entsprechend als Realisation einer einfachen Stichprobe $X_1, \ldots, X_9$ vom Umfang 9 zu Y aufgefasst werden können. Auf Basis dieser Realisation soll dann entschieden werden, ob von der Korrektheit der Justierung auszugehen ist und die Produktion unverändert weiterlaufen soll, oder ob von einer fehlerhaften Justierung auszugehen ist und die Produktion entsprechend zu stoppen ist, um eine Neujustierung der Abfüllanlage vorzunehmen.

Zur Vereinfachung der Darstellung soll im weiteren Verlauf auf die Angabe der Einheit [g] verzichtet werden.

(a) Zur Aggregation der Stichprobeninformation wird zunächst das arithmetische Mittel der Stichprobenzufallsvariablen $\overline{X} = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9} X_i$ betrachtet. Wie ist dieser Mittelwert in Abhängigkeit des tatsächlichen Erwartungswerts $\mu = \mathrm{E}(Y)$ der Abfüllmenge in dieser Situation verteilt?

(b) Zur vereinfachten Formulierung der Entscheidungsregel betrachte man nun statt $\overline{X}$ die transformierte Größe $N = \frac{\overline{X}-150}{2}\sqrt{9}$. Wie ist diese Größe in Abhängigkeit des tatsächlichen Erwartungswerts μ der Abfüllmenge verteilt?

(c) Betrachtet wird nun der Fall einer korrekten Justierung, also der Fall $\mu = 150$. Rechnen Sie nach, dass N in diesem Fall das Intervall $A = [-1.96, 1.96]$ nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 5% verfehlt.

(d) Betrachten Sie nun die folgende Entscheidungsregel:

Von $\mu = 150$ ausgehen/Produktion weiterlaufen lassen, falls $N \in A$
bzw.
Von $\mu \neq 150$ ausgehen/Produktion stoppen, falls $N \notin A$

Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft diese Regel die korrekte Entscheidung, falls tatsächlich $\mu = 150$ gilt?

(e) Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft die oben formulierte Entscheidungsregel die korrekte Entscheidung, falls tatsächlich $\mu = 151$ bzw. $\mu = 148$ gilt?

(f) Wie ändern sich die Ergebnisse in den vorangegangenen Aufgabenteilen, wenn man die Stichprobengröße auf $n = 25$ ändert?