

**3. Übungsblatt zur Vorlesung  
Schließende Statistik WS 2022/23**

Aufgabe 6

Zu der (für ein unbekanntes  $\theta > 0$ ) auf dem Intervall  $[0, 2\theta]$  gleichverteilten Zufallsvariablen  $Y$  liege die Realisation  $(x_1, \dots, x_n)$  einer einfachen Stichprobe  $(X_1, \dots, X_n)$  vom Umfang  $n$  vor. Anhand dieser Stichprobenrealisation soll der unbekannte Parameter  $\theta$  geschätzt werden.

- (a) Geben Sie den Schätzer  $\hat{\theta}_{MM}$  für  $\theta$  nach der Methode der Momente an.

*Hinweis: Der Erwartungswert von  $Y$  darf und sollte durch „scharfes Hinsehen“ ohne Rechnung ermittelt werden.*

- (b) Geben Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer  $\hat{\theta}_{ML}$  für den unbekannt Parameter  $\theta$  an.

*Hinweis: Eine Dichtefunktion von  $Y$  ist gegeben durch*

$$f_Y(y|\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\theta} & : y \in [0, 2\theta] \\ 0 & : y \notin [0, 2\theta] \end{cases} .$$

- (c) In der obigen Situation liege die konkrete Stichprobenrealisation

$$(x_1, \dots, x_6) = (0.1, 1.3, 3.0, 0.6, 0.5, 1.7)$$

vor. Berechnen Sie auf der Grundlage dieser Stichprobenrealisation die Schätzwerte  $\hat{\theta}_{MM}$  nach der Momenten- und  $\hat{\theta}_{ML}$  nach der ML-Methode für  $\theta$ . Geben Sie die zugehörigen geschätzten Intervalle  $[0, 2\hat{\theta}_{MM}]$  und  $[0, 2\hat{\theta}_{ML}]$  für den Wertebereich der Gleichverteilung an. Wie beurteilen Sie die Plausibilität des Schätzwertes  $\hat{\theta}_{MM}$  der Momenten-Methode?

Aufgabe 7

Es werde angenommen, dass die ein bestimmtes Merkmal einer Grundgesamtheit beschreibende Zufallsvariable  $Y$  die folgende Dichte — abhängig von einem unbekannt Parameter  $\theta \in \mathbb{R}$  — besitze:

$$f_Y(y|\theta) = \begin{cases} e^{-(y-\theta)} & \text{falls } y \geq \theta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Eine einfache Stichprobe  $(X_1, \dots, X_n)$  zu  $Y$  ergab die Realisation  $(x_1, \dots, x_n)$ . Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzwert für  $\theta$ .

### Aufgabe 8

Das Merkmal  $Y$  einer Grundgesamtheit sei alternativverteilt mit Parameter  $p \in [0, 1]$ , d. h. es gelte

|              |         |     |
|--------------|---------|-----|
| $y_i$        | 0       | 1   |
| $p_Y(y_i p)$ | $1 - p$ | $p$ |

 .

$(X_1, \dots, X_n)$  sei eine einfache Stichprobe vom Umfang  $n$  zu  $Y$ . Weiterhin sei

$$\hat{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X}$$

der „übliche“ Schätzer für  $p$ . Zeigen Sie:

- (a)  $\hat{p}$  ist eine erwartungstreue Schätzfunktion für  $p$ .
- (b) Die Varianz von  $\hat{p}$  lautet  $\frac{p(1-p)}{n}$ .
- (c)  $\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n-1}$  ist ein erwartungstreuer Schätzer für die Varianz  $\frac{p(1-p)}{n}$  von  $\hat{p}$ .

### Aufgabe 9

Der Wähleranteil  $p$  einer Partei wird von zwei Meinungsforschungsinstituten unabhängig voneinander jeweils durch eine einfache Stichprobe vom Umfang  $n_1 = 400$  bzw.  $n_2 = 1200$  untersucht. Die Schätzfunktionen für die Wähleranteile in den beiden Stichproben seien (wie üblich) gegeben als die in der jeweiligen Stichprobe beobachteten Anteilswerte und mit  $\hat{p}_1$  bzw.  $\hat{p}_2$  bezeichnet.

(a) Zeigen Sie:

- (i)  $\text{Var}(\hat{p}_1) = 3 \cdot \text{Var}(\hat{p}_2)$
- (ii) Für jedes  $\lambda \in [0, 1]$  ist die (konvex-)kombinierte Schätzfunktion

$$\hat{p}(\lambda) := \lambda \cdot \hat{p}_1 + (1 - \lambda) \cdot \hat{p}_2$$

erwartungstreu für  $p$ .

- (b) Bestimmen Sie  $\lambda^* \in [0, 1]$  so, dass  $\hat{p}(\lambda^*)$  effizient ist in der Klasse der Schätzfunktionen  $\{\hat{p}(\lambda) | \lambda \in [0, 1]\}$ .