Mittelwertvergleiche bei zwei unabhängigen Stichproben

- Liegen zwei unabhängige Stichproben $X_1^A, \dots, X_{n_A}^A$ und $X_1^B, \dots, X_{n_B}^B$ zu jeweils normalverteilten Zufallsvariablen Y^A und Y^B vor, kann eine „Aggregation" zu einer einzigen Stichprobe wie beim Vorliegen verbundener Stichproben so nicht durchgeführt werden.
- Verglichen werden nun nicht mehr Beobachtungspaare, sondern die (getrennt) berechneten Mittelwerte $\overline{X^A}$ und $\overline{X^B}$ der beiden Stichprobenrealisationen zu Y^A bzw. Y^B.
- Wir setzen zunächst die *Normalverteilungsannahme für Y^A und Y^B* voraus!
- Die Differenz $\overline{X^A} - \overline{X^B}$ ist wegen der Unabhängigkeit der Stichproben dann offensichtlich normalverteilt mit Erwartungswert $\mu_A - \mu_B$ (für $\mu_A = \mu_B$ gilt also gerade $\mathrm{E}(\overline{X^A} - \overline{X^B}) = 0$) und Varianz

$$\mathrm{Var}(\overline{X^A} - \overline{X^B}) = \mathrm{Var}(\overline{X^A}) + \mathrm{Var}(\overline{X^B}) = \frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B} .$$

- Sind die beteiligten Varianzen bekannt, kann zum Vergleich von μ_A und μ_B somit unmittelbar ein exakter Gauß-Test konstruiert werden.

Zusammenfassung: 2-Stichproben-Gauß-Test

bei bekannten Varianzen

Anwendungs-voraussetzungen	exakt: $Y^A \sim N(\mu_A, \sigma_A^2)$, $Y^B \sim N(\mu_B, \sigma_B^2)$, σ_A^2, σ_B^2 bekannt $X_1^A, \dots, X_{n_A}^A$ einfache Stichprobe zu Y^A, unabhängig von einfacher Stichprobe $X_1^B, \dots, X_{n_B}^B$ zu Y^B.		
Nullhypothese Gegenhypothese	$H_0 : \mu_A = \mu_B$ $H_1 : \mu_A \neq \mu_B$	$H_0 : \mu_A \leq \mu_B$ $H_1 : \mu_A > \mu_B$	$H_0 : \mu_A \geq \mu_B$ $H_1 : \mu_A < \mu_B$
Teststatistik Verteilung (H_0)	$N = \dfrac{\overline{X^A} - \overline{X^B}}{\sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}}}$ N für $\mu_A = \mu_B$ $N(0,1)$-verteilt		
Benötigte Größen	$\overline{X^A} = \frac{1}{n_A}\sum_{i=1}^{n_A} X_i^A$, $\quad \overline{X^B} = \frac{1}{n_B}\sum_{i=1}^{n_B} X_i^B$		
Kritischer Bereich zum Niveau α	$(-\infty, -N_{1-\frac{\alpha}{2}})$ $\cup(N_{1-\frac{\alpha}{2}}, \infty)$	$(N_{1-\alpha}, \infty)$	$(-\infty, -N_{1-\alpha})$
p-Wert	$2 \cdot (1 - \Phi(\lvert N \rvert))$	$1 - \Phi(N)$	$\Phi(N)$

- Sind die Varianzen σ_A^2 und σ_B^2 unbekannt, so ist zu unterscheiden, ob man wenigstens $\sigma_A^2 = \sigma_B^2$ annehmen kann oder nicht.
- Im Fall übereinstimmender Varianzen $\sigma_A^2 = \sigma_B^2$ wird diese mit Hilfe eines gewichteten Mittelwerts S^2 der Stichprobenvarianzen

$$S_{Y^A}^2 = \frac{1}{n_A - 1}\sum_{i=1}^{n_A}(X_i^A - \overline{X^A})^2 \qquad \text{und} \qquad S_{Y^B}^2 = \frac{1}{n_B - 1}\sum_{j=1}^{n_B}(X_j^B - \overline{X^B})^2$$

in der Form

$$S^2 = \frac{(n_A - 1)S_{Y^A}^2 + (n_B - 1)S_{Y^B}^2}{n_A + n_B - 2} = \frac{\sum_{i=1}^{n_A}(X_i^A - \overline{X^A})^2 + \sum_{j=1}^{n_B}(X_j^B - \overline{X^B})^2}{n_A + n_B - 2}$$

geschätzt, ein exakter t-Test ist damit konstruierbar.

- Für $n_A = n_B$ erhält man die einfachere Darstellung $S^2 = \dfrac{S_{Y^A}^2 + S_{Y^B}^2}{2}$.

Zusammenfassung: 2-Stichproben-t-Test

bei unbekannten, aber übereinstimmenden Varianzen

Anwendungs-voraussetzungen	exakt: $Y^A \sim N(\mu_A, \sigma_A^2)$, $Y^B \sim N(\mu_B, \sigma_B^2)$, $\mu_A, \mu_B, \sigma_A^2 = \sigma_B^2$ unbek. approx.: $\mathrm{E}(Y^A) = \mu_A, \mathrm{E}(Y^B) = \mu_B, \mathrm{Var}(Y^A) = \mathrm{Var}(Y^B)$ unbekannt $X_1^A, \dots, X_{n_A}^A$ einfache Stichprobe zu Y^A, unabhängig von einfacher Stichprobe $X_1^B, \dots, X_{n_B}^B$ zu Y^B.		
Nullhypothese Gegenhypothese	$H_0 : \mu_A = \mu_B$ $H_1 : \mu_A \neq \mu_B$	$H_0 : \mu_A \leq \mu_B$ $H_1 : \mu_A > \mu_B$	$H_0 : \mu_A \geq \mu_B$ $H_1 : \mu_A < \mu_B$
Teststatistik Verteilung (H_0)	$t = \dfrac{\overline{X^A} - \overline{X^B}}{\sqrt{\frac{S^2}{n_A} + \frac{S^2}{n_B}}} = \dfrac{\overline{X^A} - \overline{X^B}}{S}\sqrt{\dfrac{n_A \cdot n_B}{n_A + n_B}}$ t für $\mu_A = \mu_B$ (näherungsweise) $t(n_A + n_B - 2)$-verteilt		
Benötigte Größen	$\overline{X^A} = \frac{1}{n_A}\sum_{i=1}^{n_A} X_i^A$, $\quad \overline{X^B} = \frac{1}{n_B}\sum_{i=1}^{n_B} X_i^B$, $S = \sqrt{\frac{(n_A-1)S_{Y^A}^2 + (n_B-1)S_{Y^B}^2}{n_A+n_B-2}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n_A}(X_i^A - \overline{X^A})^2 + \sum_{i=1}^{n_B}(X_i^B - \overline{X^B})^2}{n_A+n_B-2}}$		
Kritischer Bereich zum Niveau α	$(-\infty, -t_{n_A+n_B-2;1-\frac{\alpha}{2}})$ $\cup(t_{n_A+n_B-2;1-\frac{\alpha}{2}}, \infty)$	$(t_{n_A+n_B-2;1-\alpha}, \infty)$	$(-\infty, -t_{n_A+n_B-2;1-\alpha})$
p-Wert	$2 \cdot (1 - F_{t(n_A+n_B-2)}(\lvert t \rvert))$	$1 - F_{t(n_A+n_B-2)}(t)$	$F_{t(n_A+n_B-2)}(t)$

Beispiel: Absatzwirkung einer Werbeaktion

- Untersuchungsgegenstand: Hat eine spezielle Sonderwerbeaktion positiven Einfluss auf den mittleren Absatz?
- Stichprobeninformation: Messung der prozentualen Absatzänderungen $x_1^A, \dots, x_{10}^A$ in $n_A = 10$ Supermärkten **ohne** Sonderwerbeaktion und $x_1^B, \dots, x_5^B$ in $n_B = 5$ Supermärkten **mit** Sonderwerbeaktion.
- Annahme: Für prozentuale Absatzänderungen Y^A ohne bzw. Y^B mit Sonderwerbeaktion gilt $Y^A \sim N(\mu_A, \sigma_A^2)$, $Y^B \sim N(\mu_B, \sigma_B^2)$, $\mu_A, \mu_B, \sigma_A^2 = \sigma_B^2$ unbekannt, $X_1^A, \dots, X_{10}^A$ einfache Stichprobe zu Y^A, unabhängig von einfacher Stichprobe $X_1^B, \dots, X_5^B$ zu Y^B.
- (Zwischen-)Ergebnisse aus Stichprobenrealisation:

$$\overline{x^A} = 6.5, \quad \overline{x^B} = 8, \quad s_{Y^A}^2 = 20.25, \quad s_{Y^B}^2 = 23.04$$

$$\Rightarrow s = \sqrt{\frac{(n_A - 1)s_{Y^A}^2 + (n_B - 1)s_{Y^B}^2}{n_A + n_B - 2}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 20.25 + 4 \cdot 23.04}{13}} = 4.5944$$

- Gewünschtes Signifikanzniveau: $\alpha = 0.05$

Geeigneter Test:

2-Stichproben-t-Test bei übereinstimmenden, aber unbekannten Varianzen

1. **Hypothesen:**

   $H_0 : \mu_A \geq \mu_B \qquad$ gegen $\qquad H_1 : \mu_A < \mu_B$
2. **Teststatistik:**

   $t = \frac{\overline{X^A} - \overline{X^B}}{S}\sqrt{\frac{n_A \cdot n_B}{n_A + n_B}}$ ist unter H_0 $t(n_A + n_B - 2)$-verteilt (für $\mu_A = \mu_B$).
3. **Kritischer Bereich zum Niveau $\alpha = 0.05$:**

   $K = (-\infty, -t_{n_A+n_B-2;1-\alpha}) = (-\infty, -t_{13;0.95}) = (-\infty, -1.771)$
4. **Berechnung der realisierten Teststatistik:**

   $$t = \frac{\overline{x^A} - \overline{x^B}}{s}\sqrt{\frac{n_A \cdot n_B}{n_A + n_B}} = \frac{6.5 - 8}{4.5944}\sqrt{\frac{10 \cdot 5}{10 + 5}} = -0.5961$$
5. **Entscheidung:**

   $t = -0.5961 \notin (-\infty, -1.771) = K \quad \Rightarrow \quad H_0$ wird nicht abgelehnt!

   (p-Wert: $F_{t(13)}(t) = F_{t(13)}(-0.5961) = 0.2807$)

Der Test kommt also zur Entscheidung, dass eine positive Auswirkung der Sonderwerbeaktion auf die mittlere prozentuale Absatzänderung nicht bestätigt werden kann.

Sonderfall: Vergleich von Anteilswerten

- Ein Sonderfall des (approximativen) 2-Stichproben-t-Test bei unbekannten, aber übereinstimmenden Varianzen liegt vor, wenn zwei Anteilswerte miteinander verglichen werden sollen.
- Es gelte also speziell $Y^A \sim B(1, p_A)$ und $Y^B \sim B(1, p_B)$ für $p_A \in (0, 1)$ und $p_B \in (0, 1)$, außerdem seien $X_1^A, \dots, X_{n_A}^A$ sowie $X_1^B, \dots, X_{n_B}^B$ unabhängige einfache Stichproben vom Umfang n_A zu Y^A bzw. vom Umfang n_B zu Y^B.
- Zur Überprüfung stehen die Hypothesenpaare:

	$H_0 : p_A = p_B$	$H_0 : p_A \leq p_B$	$H_0 : p_A \geq p_B$
gegen	$H_1 : p_A \neq p_B$	$H_1 : p_A > p_B$	$H_1 : p_A < p_B$

- Für die Varianzen von Y^A und Y^B gilt bekanntlich $\text{Var}(Y^A) = p_A \cdot (1 - p_A)$ bzw. $\text{Var}(Y^B) = p_B \cdot (1 - p_B)$, d.h. die Varianzen sind zwar unbekannt, unter H_0 — genauer für $p_A = p_B$ — jedoch gleich.
- Mit den üblichen Schreibweisen $\widehat{p}_A := \frac{1}{n_A}\sum_{i=1}^{n_A} X_i^A$ bzw. $\widehat{p}_B := \frac{1}{n_B}\sum_{i=1}^{n_B} X_i^B$ erhält man für S^2 in Abhängigkeit von $\widehat{p}_A$ und $\widehat{p}_B$ die Darstellung:

$$S^2 = \frac{n_A \cdot \widehat{p}_A \cdot (1 - \widehat{p}_A) + n_B \cdot \widehat{p}_B \cdot (1 - \widehat{p}_B)}{n_A + n_B - 2}$$

- Approximation vernünftig, falls $5 \leq n_A\widehat{p}_A \leq n_A - 5$ und $5 \leq n_B\widehat{p}_B \leq n_B - 5$.

Zusammenfassung: 2-Stichproben-t-Test für Anteilswerte

Anwendungs-voraussetzungen	approx.: $Y^A \sim B(1, p_A)$, $Y^B \sim B(1, p_B)$, p_A, p_B unbekannt $X_1^A, \dots, X_{n_A}^A$ einfache Stichprobe zu Y^A, unabhängig von einfacher Stichprobe $X_1^B, \dots, X_{n_B}^B$ zu Y^B.		
Nullhypothese Gegenhypothese	$H_0 : p_A = p_B$ $H_1 : p_A \neq p_B$	$H_0 : p_A \leq p_B$ $H_1 : p_A > p_B$	$H_0 : p_A \geq p_B$ $H_1 : p_A < p_B$
Teststatistik	$t = \frac{\widehat{p}_A - \widehat{p}_B}{\sqrt{\frac{S^2}{n_A} + \frac{S^2}{n_B}}} = \frac{\widehat{p}_A - \widehat{p}_B}{S}\sqrt{\frac{n_A \cdot n_B}{n_A + n_B}}$		
Verteilung (H_0)	t für $p_A = p_B$ näherungsweise $t(n_A + n_B - 2)$-verteilt (Näherung ok, falls $5 \leq n_A\widehat{p}_A \leq n_A - 5$ und $5 \leq n_B\widehat{p}_B \leq n_B - 5$)		
Benötigte Größen	$\widehat{p}_A = \frac{1}{n_A}\sum_{i=1}^{n_A} X_i^A$, $\quad \widehat{p}_B = \frac{1}{n_B}\sum_{i=1}^{n_B} X_i^B$, $S = \sqrt{\frac{n_A \cdot \widehat{p}_A \cdot (1-\widehat{p}_A) + n_B \cdot \widehat{p}_B \cdot (1-\widehat{p}_B)}{n_A + n_B - 2}}$		
Kritischer Bereich zum Niveau α	$(-\infty, -t_{n_A+n_B-2;1-\frac{\alpha}{2}})$ $\cup(t_{n_A+n_B-2;1-\frac{\alpha}{2}}, \infty)$	$(t_{n_A+n_B-2;1-\alpha}, \infty)$	$(-\infty, -t_{n_A+n_B-2;1-\alpha})$
p-Wert	$2 \cdot (1 - F_{t(n_A+n_B-2)}(\lvert t \rvert))$	$1 - F_{t(n_A+n_B-2)}(t)$	$F_{t(n_A+n_B-2)}(t)$

Beispiel: Vergleich von zwei Fehlerquoten

mit approximativem 2-Stichproben-t-Test für Anteilswerte

- Untersuchungsgegenstand: Vergleich von Fehlerquoten zweier Sortiermaschinen
- Für einen automatisierten Sortiervorgang werden eine günstige (A) sowie eine hochpreisige Maschine (B) angeboten. Es soll anhand von 2 (unabhängigen) Testläufen mit jeweils $n_A = n_B = 1000$ Sortiervorgängen überprüft werden, ob die Fehlerquote p_A bei der günstigen Maschine A höher ist als die Fehlerquote p_B der hochpreisigen Maschine B.
- Resultat der Testläufe soll jeweils als Realisation einer einfachen Stichprobe aufgefasst werden können.
- Stichprobeninformation: Bei Maschine A traten 29 Fehler auf, bei Maschine B 21 Fehler.
- (Zwischen-) Ergebnisse aus Stichprobenrealisation: $\widehat{p}_A = \frac{29}{1000} = 0.029$, $\widehat{p}_B = \frac{21}{1000} = 0.021$, $s = \sqrt{\frac{1000\cdot 0.029\cdot(1-0.029)+1000\cdot 0.021\cdot(1-0.021)}{1000+1000-2}} = 0.156$
- Gewünschtes Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$.

1. **Hypothesen:**
   $H_0: p_A \leq p_B \quad$ gegen $\quad H_1: p_A > p_B$
2. **Teststatistik:**
   $t = \frac{\widehat{p}_A - \widehat{p}_B}{S}\sqrt{\frac{n_A \cdot n_B}{n_A + n_B}}$ ist unter H_0 näherungsweise $t(n_A + n_B - 2)$-verteilt (für $p_A = p_B$). Näherung ok, da $5 \leq 29 \leq 995$ und $5 \leq 21 \leq 995$.
3. **Kritischer Bereich zum Niveau $\alpha = 0.05$:**
   $K = (t_{n_A+n_B-2;1-\alpha}, +\infty) = (t_{1998;0.95}, +\infty) = (1.646, +\infty)$
4. **Berechnung der realisierten Teststatistik:**
   $$t = \frac{\widehat{p}_A - \widehat{p}_B}{s}\sqrt{\frac{n_A \cdot n_B}{n_A + n_B}} = \frac{0.029 - 0.021}{0.1562}\sqrt{\frac{1000\cdot 1000}{1000+1000}} = 1.1452$$
5. **Entscheidung:**
   $t = 1.1452 \notin (1.646, +\infty) = K \quad \Rightarrow \quad H_0$ wird nicht abgelehnt!
   (p-Wert: $1 - F_{t(1998)}(t) = 1 - F_{t(1998)}(1.1452) = 1 - 0.8739 = 0.1261$)

Der Test kommt also zum Ergebnis, dass eine höhere Fehlerquote der günstigen Maschine nicht bestätigt werden kann.

Approximativer 2-Stichproben-Gauß-Test

für Mittelwertvergleiche, wenn Gleichheit der Varianzen ungewiss

- Kann in der Situation des exakten 2-Stichproben-t-Test (Y^A und Y^B sind normalverteilt mit unbekannten Varianzen) auch unter H_0 keine Gleichheit der Varianzen vorausgesetzt werden, müssen andere Testverfahren verwendet werden, z.B. der **Welch-Test** (hier nicht besprochen).
- Als approximativer Test lässt sich (zumindest bei hinreichend großen Stichprobenumfängen, „Daumenregel" $n_A > 30$ und $n_B > 30$) auch eine leichte Modifikation des 2-Stichproben-Gauß-Tests aus Folie 188 verwenden.
- Anstelle der (dort als bekannt vorausgesetzten) Varianzen σ_A^2 und σ_B^2 sind die erwartungstreuen Schätzfunktionen $S_{Y^A}^2$ und $S_{Y^B}^2$ einzusetzen und der Test als approximativer Test durchzuführen.
- Die Teststatistik nimmt damit die Gestalt
  $$N = \frac{\overline{X^A} - \overline{X^B}}{\sqrt{\frac{S_{Y^A}^2}{n_A} + \frac{S_{Y^B}^2}{n_B}}}$$
  an und ist unter H_0 näherungsweise standardnormalverteilt.

Varianzvergleiche bei normalverteilten Zufallsvariablen

- *Nächste Anwendung:* Vergleich der Varianzen σ_A^2 und σ_B^2 zweier *normalverteilter* Zufallsvariablen $Y^A \sim N(\mu_A, \sigma_A^2)$ und $Y^B \sim N(\mu_B, \sigma_B^2)$ auf Grundlage zweier unabhängiger einfacher Stichproben $X_1^A, \ldots, X_{n_A}^A$ vom Umfang n_A zu Y^A und $X_1^B, \ldots, X_{n_B}^B$ vom Umfang n_B zu Y^B.
- *Idee:* Vergleich auf Grundlage der erwartungstreuen Schätzfunktionen
  $$S_{Y^A}^2 = \frac{1}{n_A - 1}\sum_{i=1}^{n_A}(X_i^A - \overline{X^A})^2 = \frac{1}{n_A - 1}\left(\left(\sum_{i=1}^{n_A}(X_i^A)^2\right) - n_A\overline{X^A}^2\right)$$
  $$\text{bzw. } S_{Y^B}^2 = \frac{1}{n_B - 1}\sum_{i=1}^{n_B}(X_i^B - \overline{X^B})^2 = \frac{1}{n_B - 1}\left(\left(\sum_{i=1}^{n_B}(X_i^B)^2\right) - n_B\overline{X^B}^2\right)$$
  für die Varianz von Y^A bzw. die Varianz von Y^B.
- Es gilt $\frac{(n_A-1)\cdot S_{Y^A}^2}{\sigma_A^2} \sim \chi^2(n_A - 1)$ unabhängig von $\frac{(n_B-1)\cdot S_{Y^B}^2}{\sigma_B^2} \sim \chi^2(n_B - 1)$.
- Geeignete Testgröße lässt sich aus (standardisiertem) Verhältnis von $\frac{(n_A-1)\cdot S_{Y^A}^2}{\sigma_A^2}$ und $\frac{(n_B-1)\cdot S_{Y^B}^2}{\sigma_B^2}$ herleiten.

Die Familie der $F(m,n)$-Verteilungen

- Sind χ^2_m und χ^2_n stochastisch unabhängige, mit m bzw. n Freiheitsgraden χ^2-verteilte Zufallsvariablen, so heißt die Verteilung der Zufallsvariablen

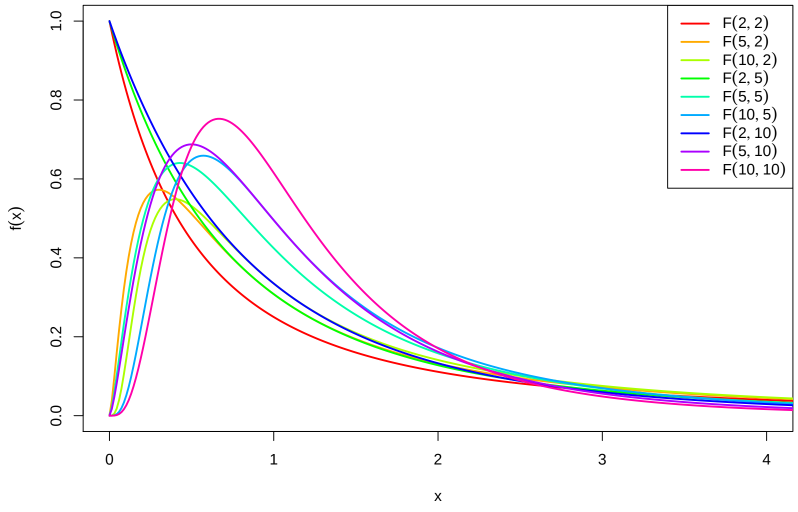
$$F_n^m := \frac{\frac{\chi^2_m}{m}}{\frac{\chi^2_n}{n}} = \frac{\chi^2_m}{\chi^2_n} \cdot \frac{n}{m}$$

  F-**Verteilung mit** m **Zähler- und** n **Nennerfreiheitsgraden**, in Zeichen $F_n^m \sim F(m,n)$.
- Offensichtlich können $F(m,n)$-verteilte Zufallsvariablen nur nichtnegative Werte annehmen, der Träger ist also $[0,\infty)$.
- Für $n > 2$ gilt $\mathrm{E}(F_n^m) = \frac{n}{n-2}$.
- Als Abkürzung für α-Quantile der $F(m,n)$-Verteilung verwenden wir (wie üblich) $F_{m,n;\alpha}$.
- Für die Quantile der $F(m,n)$-Verteilungen gilt der folgende Zusammenhang:

$$F_{m,n;\alpha} = \frac{1}{F_{n,m;1-\alpha}}$$

Grafische Darstellung einiger $F(m,n)$-Verteilungen

für $m,n \in \{2,5,10\}$



Varianzvergleiche (Fortsetzung)

- Eine $F(n_A-1, n_B-1)$-verteilte Zufallsvariable erhält man also in der Anwendungssituation der Varianzvergleiche durch das Verhältnis

$$\frac{\frac{(n_A-1)\cdot S^2_{Y^A}}{\sigma_A^2}}{\frac{(n_B-1)\cdot S^2_{Y^B}}{\sigma_B^2}} \cdot \frac{n_B-1}{n_A-1} = \frac{\frac{S^2_{Y^A}}{\sigma_A^2}}{\frac{S^2_{Y^B}}{\sigma_B^2}},$$

  das allerdings von den (unbekannten!) Varianzen σ_A^2 und σ_B^2 abhängt.
- Gilt jedoch $\sigma_A^2 = \sigma_B^2$, so hat auch das Verhältnis

$$F := \frac{S^2_{Y^A}}{S^2_{Y^B}}$$

  eine $F(n_A-1, n_B-1)$-Verteilung und ist somit als Testgröße geeignet, wenn unter H_0 (eventuell im Grenzfall) $\sigma_A^2 = \sigma_B^2$ angenommen wird.
- Offensichtlich sprechen große Werte von F eher für $\sigma_A^2 > \sigma_B^2$, kleine eher für $\sigma_A^2 < \sigma_B^2$, Verhältnisse in der Nähe von 1 für $\sigma_A^2 = \sigma_B^2$.

- Da die Klasse der F-Verteilungen von 2 Verteilungsparametern abhängt, ist es nicht mehr möglich, α-Quantile für verschiedene Freiheitsgradkombinationen und verschiedene α darzustellen.
- In Formelsammlung: Tabellen (nur) mit 0.95-Quantilen für verschiedene Kombinationen von m und n für $F(m,n)$-Verteilungen verfügbar.
- Bei linksseitigen Tests (zum Niveau $\alpha = 0.05$) und zweiseitigen Tests (zum Niveau $\alpha = 0.10$) muss also regelmäßig die „Symmetrieeigenschaft"

$$F_{m,n;\alpha} = \frac{1}{F_{n,m;1-\alpha}}$$

  verwendet werden, um auch 0.05-Quantile bestimmen zu können.
- Der resultierende Test ist insbesondere zur Überprüfung der Anwendungsvoraussetzungen für den 2-Stichproben-t-Test hilfreich.

Wichtig!

Die Normalverteilungsannahme für Y^A und Y^B ist wesentlich. Ist diese (deutlich) verletzt, ist auch eine näherungsweise Verwendung des Tests nicht mehr angebracht.

0.95-Quantile der $F(m,n)$-Verteilungen $F_{m,n;0.95}$

$n \backslash m$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	161.448	199.500	215.707	224.583	230.162	233.986	236.768	238.883
2	18.513	19.000	19.164	19.247	19.296	19.330	19.353	19.371
3	10.128	9.552	9.277	9.117	9.013	8.941	8.887	8.845
4	7.709	6.944	6.591	6.388	6.256	6.163	6.094	6.041
5	6.608	5.786	5.409	5.192	5.050	4.950	4.876	4.818
6	5.987	5.143	4.757	4.534	4.387	4.284	4.207	4.147
7	5.591	4.737	4.347	4.120	3.972	3.866	3.787	3.726
8	5.318	4.459	4.066	3.838	3.687	3.581	3.500	3.438
9	5.117	4.256	3.863	3.633	3.482	3.374	3.293	3.230
10	4.965	4.103	3.708	3.478	3.326	3.217	3.135	3.072
11	4.844	3.982	3.587	3.357	3.204	3.095	3.012	2.948
12	4.747	3.885	3.490	3.259	3.106	2.996	2.913	2.849
13	4.667	3.806	3.411	3.179	3.025	2.915	2.832	2.767
14	4.600	3.739	3.344	3.112	2.958	2.848	2.764	2.699
15	4.543	3.682	3.287	3.056	2.901	2.790	2.707	2.641
16	4.494	3.634	3.239	3.007	2.852	2.741	2.657	2.591
17	4.451	3.592	3.197	2.965	2.810	2.699	2.614	2.548
18	4.414	3.555	3.160	2.928	2.773	2.661	2.577	2.510
19	4.381	3.522	3.127	2.895	2.740	2.628	2.544	2.477
20	4.351	3.493	3.098	2.866	2.711	2.599	2.514	2.447
30	4.171	3.316	2.922	2.690	2.534	2.421	2.334	2.266
40	4.085	3.232	2.839	2.606	2.449	2.336	2.249	2.180
50	4.034	3.183	2.790	2.557	2.400	2.286	2.199	2.130
100	3.936	3.087	2.696	2.463	2.305	2.191	2.103	2.032
150	3.904	3.056	2.665	2.432	2.274	2.160	2.071	2.001

Zusammenfassung: F-Test zum Vergleich der Varianzen

zweier normalverteilter Zufallsvariablen

Anwendungsvoraussetzungen	exakt: $Y^A \sim N(\mu_A, \sigma_A^2)$, $Y^B \sim N(\mu_B, \sigma_B^2)$, $\mu_A, \mu_B, \sigma_A^2, \sigma_B^2$ unbek. $X_1^A, \ldots, X_{n_A}^A$ einfache Stichprobe zu Y^A, unabhängig von einfacher Stichprobe $X_1^B, \ldots, X_{n_B}^B$ zu Y^B.		
Nullhypothese Gegenhypothese	$H_0 : \sigma_A^2 = \sigma_B^2$ $H_1 : \sigma_A^2 \neq \sigma_B^2$	$H_0 : \sigma_A^2 \leq \sigma_B^2$ $H_1 : \sigma_A^2 > \sigma_B^2$	$H_0 : \sigma_A^2 \geq \sigma_B^2$ $H_1 : \sigma_A^2 < \sigma_B^2$
Teststatistik Verteilung (H_0)	$F = \frac{S_{Y^A}^2}{S_{Y^B}^2}$ F unter H_0 für $\sigma_A^2 = \sigma_B^2$ $F(n_A-1, n_B-1)$-verteilt		
Benötigte Größen	$\overline{X^A} = \frac{1}{n_A}\sum_{i=1}^{n_A} X_i^A$, $\overline{X^B} = \frac{1}{n_B}\sum_{i=1}^{n_B} X_i^B$, $S_{Y^A}^2 = \frac{1}{n_A-1}\sum_{i=1}^{n_A}(X_i^A - \overline{X^A})^2 = \frac{1}{n_A-1}\left(\left(\sum_{i=1}^{n_A}(X_i^A)^2\right) - n_A\overline{X^A}^2\right)$ $S_{Y^B}^2 = \frac{1}{n_B-1}\sum_{i=1}^{n_B}(X_i^B - \overline{X^B})^2 = \frac{1}{n_B-1}\left(\left(\sum_{i=1}^{n_B}(X_i^B)^2\right) - n_B\overline{X^B}^2\right)$		
Kritischer Bereich zum Niveau α	$[0, F_{n_A-1,n_B-1;\frac{\alpha}{2}})$ $\cup(F_{n_A-1,n_B-1;1-\frac{\alpha}{2}}, \infty)$	$(F_{n_A-1,n_B-1;1-\alpha}, \infty)$	$[0, F_{n_A-1,n_B-1;\alpha})$
p-Wert	$2 \cdot \min\left\{F_{F(n_A-1,n_B-1)}(F),\right.$ $\left.1 - F_{F(n_A-1,n_B-1)}(F)\right\}$	$1 - F_{F(n_A-1,n_B-1)}(F)$	$F_{F(n_A-1,n_B-1)}(F)$

Beispiel: Präzision von 2 Abfüllanlagen

- Untersuchungsgegenstand: Entscheidung, ob Varianz der Abfüllmenge von zwei Abfüllanlagen übereinstimmt oder nicht.
- Annahmen: Abfüllmengen Y^A und Y^B jeweils normalverteilt.
- Unabhängige einfache Stichproben vom Umfang $n_A = 9$ zu Y^A und vom Umfang $n_B = 7$ zu Y^B liefern realisierte Varianzschätzungen $s_{Y^A}^2 = 16.22$ sowie $s_{Y^B}^2 = 10.724$.
- Gewünschtes Signifikanzniveau $\alpha = 0.10$.

Geeigneter Test: F-**Test für die Varianzen normalverteilter Zufallsvariablen**

1. **Hypothesen:** $H_0 : \sigma_A^2 = \sigma_B^2 \quad$ gegen $\quad H_1 : \sigma_A^2 \neq \sigma_B^2$
2. **Teststatistik:** $F = \frac{S_{Y^A}^2}{S_{Y^B}^2}$ ist unter H_0 $F(n_A-1, n_B-1)$-verteilt.
3. **Kritischer Bereich zum Niveau** $\alpha = 0.10$**:** Mit $F_{8,6;0.05} = 1/F_{6,8;0.95} = 1/3.581 = 0.279$:
   $K = [0, F_{n_A-1,n_B-1;\frac{\alpha}{2}}) \cup (F_{n_A-1,n_B-1;1-\frac{\alpha}{2}}, +\infty) =$
   $[0, F_{8,6;0.05}) \cup (F_{8,6;0.95}, +\infty) = [0, 0.279) \cup (4.147, +\infty)$
4. **Berechnung der realisierten Teststatistik:** $F = \frac{s_{Y^A}^2}{s_{Y^B}^2} = \frac{16.22}{10.724} = 1.512$
5. **Entscheidung:** $F \notin K \quad \Rightarrow \quad H_0$ wird nicht abgelehnt!

Beispiel: p-Wert bei F-Test für Varianzen (Grafik)

Abfüllanlagenbeispiel, realisierte Teststatistik $F = 1.512$, p-Wert: 0.632