

Hypothesentests

- *Bisher* wichtigstes betrachtetes Anwendungsbeispiel der schließenden Statistik:

Punkt- bzw. Intervallschätzung des unbekanntes Mittelwerts

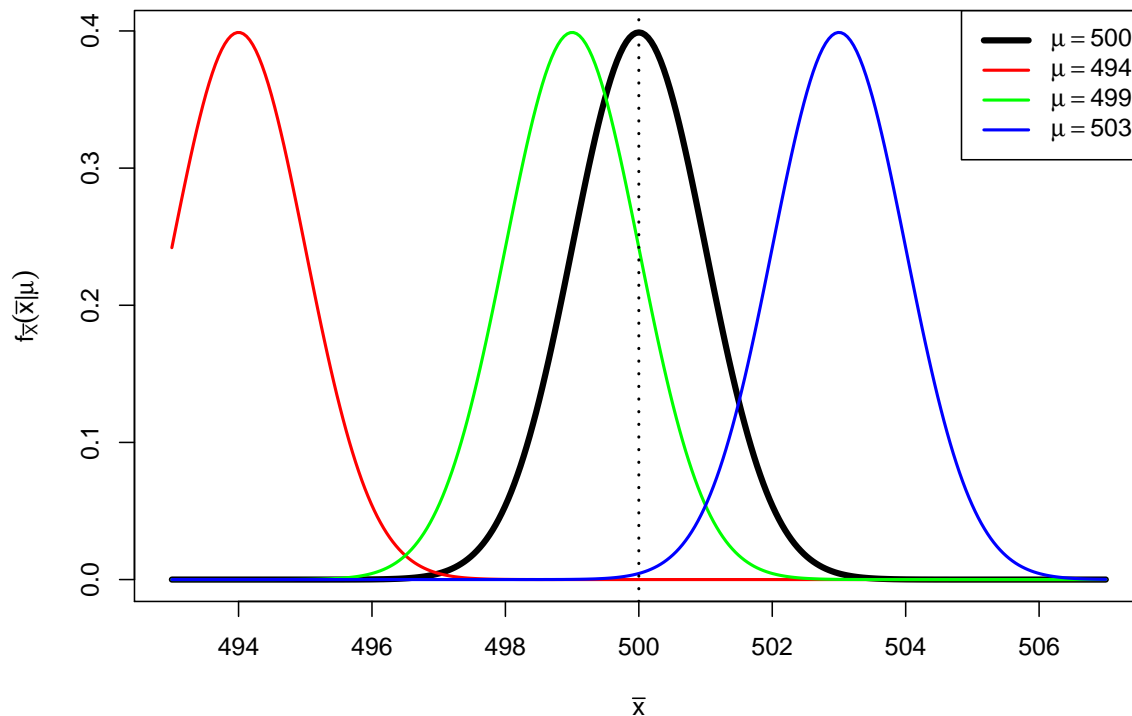
- Hierzu: Verwendung der
 - ① theoretischen Information über Verteilung von \bar{X}
 - ② empirischen Information aus Stichprobenrealisation \bar{x} von \bar{X}
 zur Konstruktion einer
 - ▶ Punktschätzung (inkl. Beurteilung der Genauigkeit des Schätzers!)
 - ▶ Intervallschätzung, bei der jede Stichprobenziehung mit einer vorgegebenen Chance ein realisiertes (Konfidenz-)Intervall liefert, welches den (wahren) Mittelwert enthält.
- Nächste Anwendung: **Hypothesentests**:
 - Entscheidung**, ob die unbekanntes, wahre Verteilung von Y zu einer vorgegebenen Teilmenge der Verteilungsannahme W gehört oder nicht.
- Zunächst: Illustration der Vorgehensweise am Beispiel einer Entscheidung über den Mittelwert der Verteilung.

Einführendes Beispiel

- Interessierende Zufallsvariable Y :
Von einer speziellen Abfüllmaschine abgefüllte Inhaltmenge von Müslipackungen mit Soll-Inhalt $\mu_0 = 500$ (in [g]).
- Verteilungsannahme:
 $Y \sim N(\mu, 4^2)$ mit unbekanntem Erwartungswert $\mu = E(Y)$.
- Es liege eine Realisation x_1, \dots, x_{16} einer einfachen Stichprobe X_1, \dots, X_{16} vom Umfang $n = 16$ zu Y vor.
- **Ziel**: Verwendung der Stichprobeninformation (über \bar{X} bzw. \bar{x}), um zu **entscheiden**, ob die tatsächliche mittlere Füllmenge (also der wahre, unbekanntes Parameter μ) mit dem Soll-Inhalt $\mu_0 = 500$ übereinstimmt oder nicht.
- Offensichtlich gilt:
 - ▶ \bar{X} schwankt um den wahren Mittelwert μ ; selbst wenn $\mu = 500$ gilt, wird \bar{X} praktisch nie genau den Wert $\bar{x} = 500$ annehmen!
 - ▶ Realisationen \bar{x} „in der Nähe“ von 500 sprechen eher dafür, dass $\mu = 500$ gilt.
 - ▶ Realisationen \bar{x} „weit weg“ von 500 sprechen eher dagegen, dass $\mu = 500$ gilt.
- Also: Entscheidung für Hypothese $\mu = 500$, wenn \bar{x} nahe bei 500, und gegen $\mu = 500$ (also für $\mu \neq 500$), wenn \bar{x} weit weg von 500.
- **Aber**: Wo ist die Grenze zwischen „in der Nähe“ und „weit weg“?

Verteilungen von \bar{X}

für verschiedene Parameter μ bei $\sigma = 4$ und $n = 16$



Entscheidungsproblem

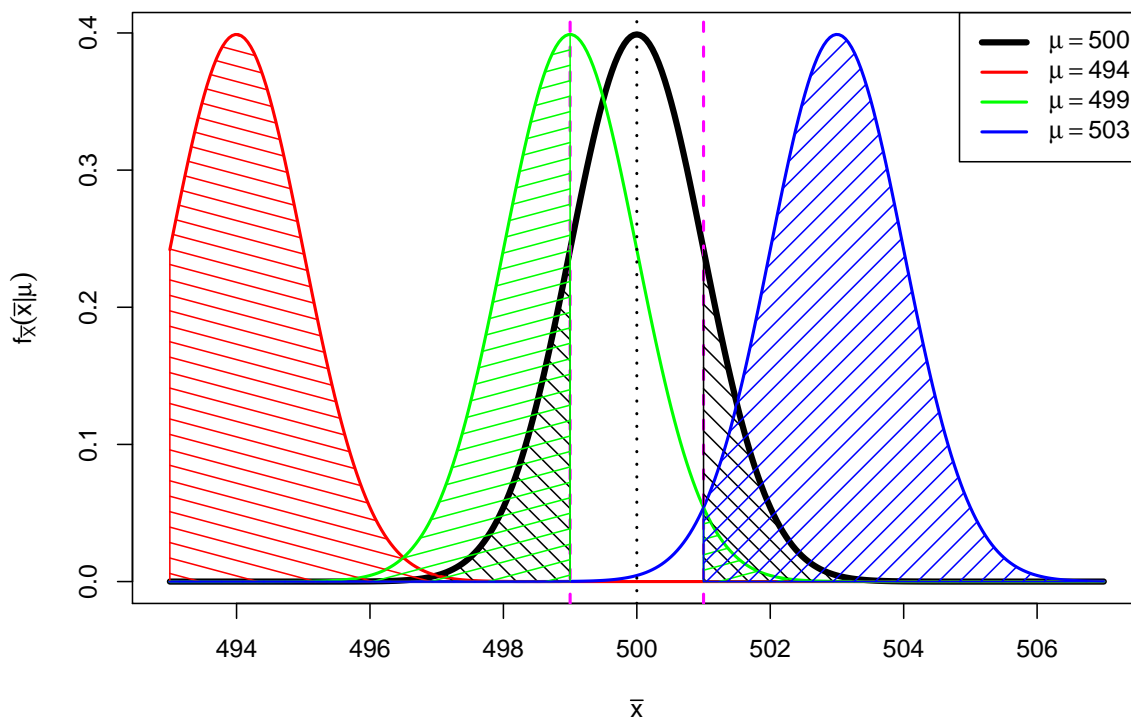
- Fällen einer Entscheidung zwischen $\mu = 500$ und $\mu \neq 500$ führt zu *genau einer* der folgenden vier verschiedenen Situationen:

	Tatsächliche Situation: $\mu = 500$	Tatsächliche Situation: $\mu \neq 500$
Entscheidung für $\mu = 500$	richtige Entscheidung	Fehler 2. Art
Entscheidung für $\mu \neq 500$	Fehler 1. Art	richtige Entscheidung

- Wünschenswert:
Sowohl „Fehler 1. Art“ als auch „Fehler 2. Art“ möglichst selten begehen.
- Aber:** Zielkonflikt vorhanden:
Je näher Grenze zwischen „in der Nähe“ und „weit weg“ an $\mu_0 = 500$, desto
 - ▶ seltener Fehler 2. Art
 - ▶ häufiger Fehler 1. Art
 und umgekehrt für fernere Grenzen zwischen „in der Nähe“ und „weit weg“.

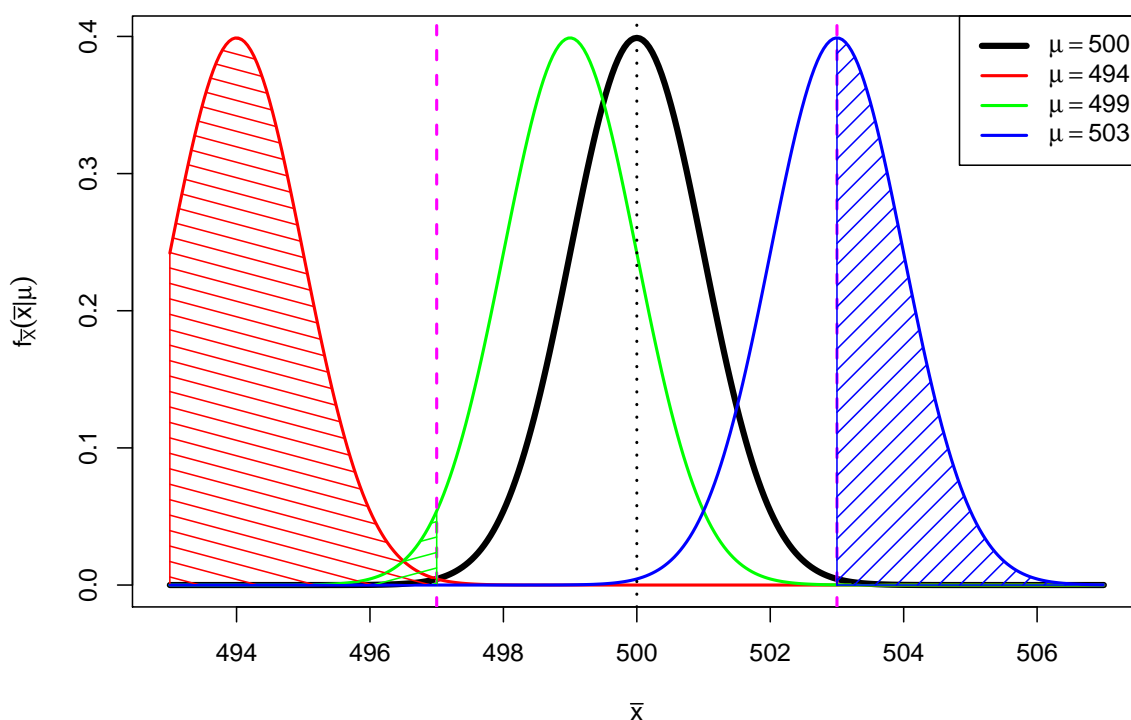
Beispiel für „nahe“ Grenze

Für $\mu \neq 500$ (gegen $\mu = 500$) entscheiden, wenn Abstand zwischen \bar{x} und 500 größer als 1



Beispiel für „ferne“ Grenze

Für $\mu \neq 500$ (gegen $\mu = 500$) entscheiden, wenn Abstand zwischen \bar{x} und 500 größer als 3



- Unmöglich, Wahrscheinlichkeiten der Fehler 1. Art und 2. Art gleichzeitig für alle möglichen Situationen (also alle μ) zu verringern.
- Übliche Vorgehensweise: **Fehler(wahrscheinlichkeit) 1. Art kontrollieren!**
- Also: Vorgabe einer *kleinen* Schranke α („**Signifikanzniveau**“) für die Wahrscheinlichkeit, mit der man einen Fehler 1. Art begehen darf.
- Festlegung der Grenze zwischen „in der Nähe“ und „weit weg“ so, dass man den Fehler 1. Art nur mit Wahrscheinlichkeit α begeht, also die Realisation \bar{X} **bei Gültigkeit von $\mu = 500$** nur mit einer Wahrscheinlichkeit von α jenseits der Grenzen liegt, bis zu denen man sich für $\mu = 500$ entscheidet!
- Damit liefert aber das Schwankungsintervall für \bar{X} zur Sicherheitswahrscheinlichkeit $1 - \alpha$

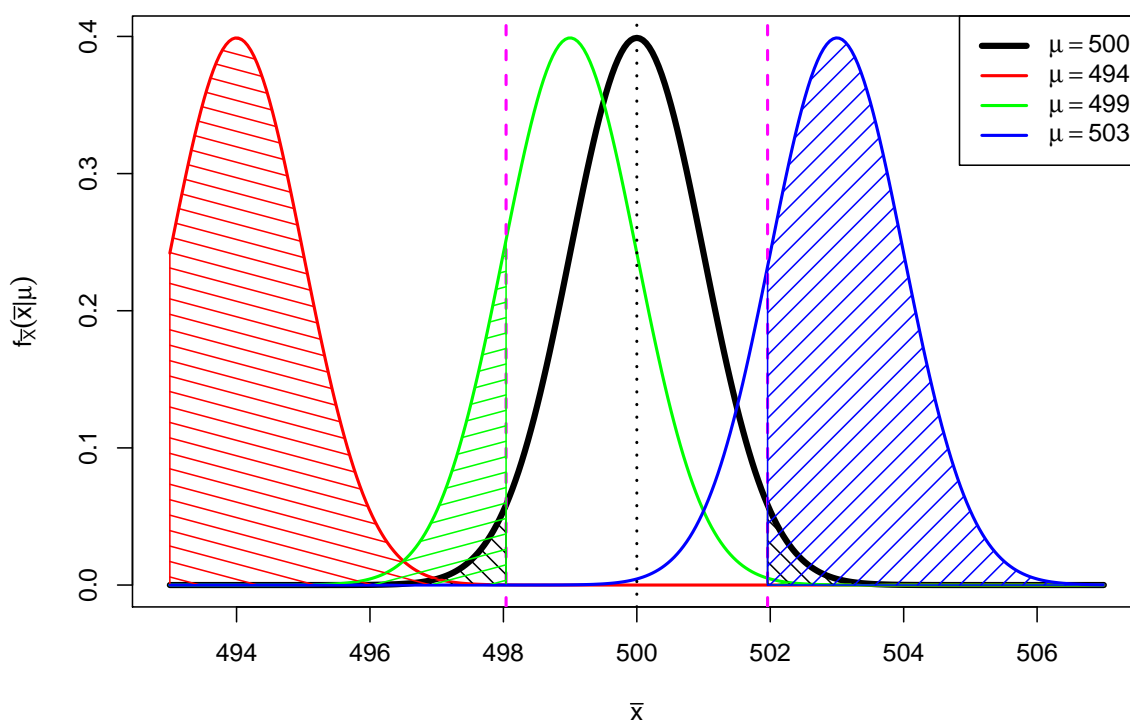
$$\left[\mu - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot N_{1-\frac{\alpha}{2}}, \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot N_{1-\frac{\alpha}{2}} \right]$$

für $\mu = \mu_0 = 500$ (!) gerade solche Grenzen, denn es gilt im Fall $\mu = \mu_0 = 500$

$$P \left\{ \bar{X} \notin \left[\mu_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot N_{1-\frac{\alpha}{2}}, \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot N_{1-\frac{\alpha}{2}} \right] \right\} = \alpha .$$

Beispiel für Grenze zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$

Grenzen aus Schwankungsintervall zur Sicherheitswahrscheinlichkeit $1 - \alpha = 0.95$



- Bei einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0.05$ entscheidet man sich also **für** $\mu = \mu_0 = 500$ genau dann, wenn die Realisation \bar{x} von \bar{X} im Intervall

$$\left[500 - \frac{4}{\sqrt{16}} \cdot N_{0.975}, 500 + \frac{4}{\sqrt{16}} \cdot N_{0.975} \right] = [498.04, 501.96] ,$$

dem sog. **Annahmereich** des Hypothesentests, liegt.

- Entsprechend fällt die Entscheidung für $\mu \neq 500$ (bzw. **gegen** $\mu = 500$) aus, wenn die Realisation \bar{x} von \bar{X} in der Menge

$$(-\infty, 498.04) \cup (501.96, \infty) ,$$

dem sog. **Ablehnungsbereich** oder **kritischen Bereich** des Hypothesentests, liegt.

- Durch Angabe eines dieser Bereiche ist die Entscheidungsregel offensichtlich schon vollständig spezifiziert!
- Statt Entscheidungsregel auf Grundlage der Realisation \bar{x} von \bar{X} (unter Verwendung der Eigenschaft $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$) üblicher:

Äquivalente Entscheidungsregel auf Basis der sog. **Testgröße** oder **Teststatistik** $N := \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}$ unter Verwendung der Eigenschaft

$$\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \sim N(0, 1) \quad \text{falls} \quad \mu = \mu_0 .$$

- Die Verteilungseigenschaft von $N = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}$ für $\mu = \mu_0$ aus Folie 98 erhält man aus der allgemeineren Verteilungsaussage

$$\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \sim N \left(\frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}, 1 \right) ,$$

die man wiederum aus der Verteilung $\bar{X} \sim N \left(\mu, \frac{\sigma^2}{n} \right)$ durch Anwendung der aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung bekannten Transformationsregeln ableiten kann. Damit: $F_N(x) = P\{N \leq x\} = \Phi \left(x - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \right)$

- Man rechnet außerdem leicht nach:

$$\bar{X} \in \left[\mu_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot N_{1-\frac{\alpha}{2}}, \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot N_{1-\frac{\alpha}{2}} \right] \Leftrightarrow \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \in \left[-N_{1-\frac{\alpha}{2}}, N_{1-\frac{\alpha}{2}} \right]$$

- Als Annahmereich A für die Testgröße $N = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}$ erhält man also $\left[-N_{1-\frac{\alpha}{2}}, N_{1-\frac{\alpha}{2}} \right]$, als kritischen Bereich K entsprechend

$$K = \mathbb{R} \setminus A = \left(-\infty, -N_{1-\frac{\alpha}{2}} \right) \cup \left(N_{1-\frac{\alpha}{2}}, \infty \right)$$

und damit eine Formulierung der Entscheidungsregel auf Grundlage von N .

- In Abhängigkeit des tatsächlichen Erwartungswerts μ von Y kann so die Wahrscheinlichkeit für die Ablehnung der Hypothese $\mu = \mu_0$ berechnet werden:

$$\begin{aligned} P\{N \in K\} &= P\{N \in (-\infty, -N_{1-\frac{\alpha}{2}}) \cup (N_{1-\frac{\alpha}{2}}, \infty)\} \\ &= P\{N < -N_{1-\frac{\alpha}{2}}\} + P\{N > N_{1-\frac{\alpha}{2}}\} \\ &= \Phi\left(-N_{1-\frac{\alpha}{2}} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}\right) + 1 - \Phi\left(N_{1-\frac{\alpha}{2}} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}\right) \end{aligned}$$

- Im Beispiel erhält man damit die folgenden Wahrscheinlichkeiten für Annahme bzw. Ablehnung der Hypothese $\mu = \mu_0 = 500$ zu den betrachteten Szenarien (also unterschiedlichen wahren Parametern μ):

	Wahrscheinlichkeit der Annahme von $\mu = 500$ $P\{N \in A\}$	Wahrscheinlichkeit der Ablehnung von $\mu = 500$ $P\{N \in K\}$
$\mu = 500$	0.95	0.05
$\mu = 494$	0	1
$\mu = 499$	0.8299	0.1701
$\mu = 503$	0.1492	0.8508

(Fettgedruckte Wahrscheinlichkeiten entsprechen korrekter Entscheidung.)

Grundbegriffe: Hypothesen

- Bekannt: Hypothesentests sind Entscheidungsregeln für die Fragestellung „Liegt die (unbekannte) Verteilung Q_Y von Y in einer bestimmten **Teilmenge** der Verteilungsannahme W oder nicht?“
- Zur präzisen Formulierung der Fragestellung: Angabe der interessierenden Teilmenge W_0 von Verteilungen mit $\emptyset \neq W_0 \subsetneq W$
- Man nennt dann die Hypothese $Q_Y \in W_0$ auch **Nullhypothese** und schreibt $H_0 : Q_Y \in W_0$. Die Verletzung der Nullhypothese entspricht dem Eintreten der sog. **Gegenhypothese** oder **Alternative** $Q_Y \in W_1 := W \setminus W_0$; man schreibt auch $H_1 : Q_Y \in W_1$.
- Formulierung *prinzipiell* immer in zwei Varianten möglich, da W_0 und W_1 vertauscht werden können. Welche der beiden Varianten gewählt wird, ist allerdings wegen der Asymmetrie in den Wahrscheinlichkeiten für Fehler 1. und 2. Art **nicht unerheblich** (später mehr!).
- Eine Hypothese heißt **einfach**, wenn die zugehörige Teilmenge von W einelementig ist, **zusammengesetzt** sonst.
- Im Beispiel: $W = \{N(\mu, 4^2) \mid \mu \in \mathbb{R}\}$, $W_0 = \{N(500, 4^2)\}$.
 H_0 ist also einfach, H_1 zusammengesetzt.

Hypothesen bei parametrischen Verteilungsannahmen

- Ist W eine parametrische Verteilungsannahme mit Parameterraum Θ , so existiert offensichtlich immer auch eine (äquivalente) Darstellung von H_0 und H_1 in der Gestalt

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \quad \text{gegen} \quad H_1 : \theta \in \Theta_1 := \Theta \setminus \Theta_0$$

für eine Teilmenge Θ_0 des Parameterraums Θ mit $\emptyset \neq \Theta_0 \subsetneq \Theta$.

- Im Beispiel: $W = \{N(\mu, 4^2) \mid \mu \in \Theta = \mathbb{R}\}$, $\Theta_0 = \{500\}$
- Hypothesenformulierung damit z.B. in der folgenden Form möglich:

$$H_0 : \mu = \mu_0 = 500 \quad \text{gegen} \quad H_1 : \mu \neq \mu_0 = 500$$

- Hypothesentests bei parametrischer Verteilungsannahme heißen auch **parametrische (Hypothesen-)Tests**.
- Parametrische Tests heißen (für $\Theta \subseteq \mathbb{R}$) **zweiseitig**, wenn Θ_1 **links und rechts** von Θ_0 liegt, **einseitig** sonst (Im Beispiel: zweiseitiger Test).
- Einseitige Tests heißen **linksseitig**, wenn Θ_1 links von Θ_0 liegt, **rechtsseitig** sonst.

Teststatistik und Ablehnungsbereich

- Nach Präzisierung der Fragestellung in den Hypothesen benötigt man nun eine geeignete **Entscheidungsregel**, die *im Prinzip* jeder möglichen Stichprobenrealisation (aus dem Stichprobenraum \mathcal{X}) eine Entscheidung **entweder** für H_0 **oder** für H_1 zuordnet.
- In der Praxis Entscheidung (fast) immer in 3 Schritten:
 - 1 „Zusammenfassung“ der für die Entscheidungsfindung relevanten Stichprobeninformation mit einer geeigneten Stichprobenfunktion, der sog. **Teststatistik** oder **Testgröße** T .
 - 2 Angabe eines **Ablehnungsbereichs** bzw. **kritischen Bereichs** K , in den die Teststatistik **bei Gültigkeit von H_0** nur mit einer typischerweise kleinen Wahrscheinlichkeit (durch eine obere Grenze α beschränkt) fallen darf.
 - 3 Entscheidung **gegen H_0** bzw. für H_1 , falls realisierter Wert der Teststatistik in den **Ablehnungsbereich** bzw. **kritischen Bereich** K fällt, also $T \in K$ gilt (für H_0 , falls $T \notin K$).
- Konstruktion des kritischen Bereichs K in Schritt 2 gerade so, dass **Wahrscheinlichkeit für Fehler 1. Art beschränkt** bleibt durch ein vorgegebenes **Signifikanzniveau** (auch „**Irrtumswahrscheinlichkeit**“) α .
- Konstruktion meist so, dass Niveau α gerade eben eingehalten wird (also **kleinste** obere Schranke für die Fehlerwahrscheinlichkeit 1. Art ist).

- Für Konstruktion des kritischen Bereichs wesentlich:
Analyse der Verteilung der Teststatistik, insbesondere falls H_0 gilt!

- **Im Beispiel:**

- 1 Teststatistik: $N = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}$
Verteilung: $N \sim N\left(\frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}, 1\right)$, also insbesondere
 $N \sim N(0, 1)$ falls H_0 (also $\mu = \mu_0$) gilt.

- 2 Kritischer Bereich: $K = \left(-\infty, -N_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \cup \left(N_{1-\frac{\alpha}{2}}, \infty\right)$

Wahrscheinlichkeit der Ablehnung von H_0 (abhängig vom Parameter μ):

$$P\{N \in K\} = \Phi\left(-N_{1-\frac{\alpha}{2}} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}\right) + 1 - \Phi\left(N_{1-\frac{\alpha}{2}} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}\right)$$

- Die Zuordnung $G : \Theta \rightarrow \mathbb{R}; G(\theta) = P\{T \in K\}$ heißt (allgemein) auch **Gütefunktion** des Tests. Im Beispiel also:

$$G(\mu) = \Phi\left(-N_{1-\frac{\alpha}{2}} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}\right) + 1 - \Phi\left(N_{1-\frac{\alpha}{2}} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}\right)$$

- Mit der Gütefunktion können also offensichtlich
 - ▶ Fehlerwahrscheinlichkeiten 1. Art (für $\theta \in \Theta_0$) direkt durch $G(\theta)$ und
 - ▶ Fehlerwahrscheinlichkeiten 2. Art (für $\theta \in \Theta_1$) durch $1 - G(\theta)$

berechnet werden!

- Berechnung der Eintrittswahrscheinlichkeiten EW mit Gütefunktion $G(\theta)$:

	Tatsächliche Situation: $\theta \in \Theta_0$ (H_0 wahr)	Tatsächliche Situation: $\theta \notin \Theta_0$ (H_0 falsch)
Entscheidung für H_0 ($\theta \in \Theta_0$)	richtige Entscheidung $EW : 1 - G(\theta)$	Fehler 2. Art $EW : 1 - G(\theta)$
Entscheidung gegen H_0 ($\theta \notin \Theta_0$)	Fehler 1. Art $EW : G(\theta)$	richtige Entscheidung $EW : G(\theta)$

- Welche Teststatistik geeignet ist und wie die Teststatistik dann verteilt ist, hängt nicht nur von der Problemformulierung (Hypothesen), sondern oft auch von der Verteilungsannahme ab!
- Test aus Beispiel zum Beispiel *exakt* anwendbar, falls $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ **mit bekannter Varianz**, und *approximativ* anwendbar, wenn Y beliebig verteilt ist **mit bekannter Varianz** (Güte der Näherung abhängig von n sowie Verteilung von Y !)
- Test aus Beispiel heißt auch „zweiseitiger Gauß-Test für den Mittelwert einer Zufallsvariablen mit bekannter Varianz“.

Zweiseitiger Gauß-Test

für den Mittelwert einer Zufallsvariablen mit bekannter Varianz

Anwendung

- als **exakter** Test, falls Y normalverteilt und $\text{Var}(Y) = \sigma^2$ bekannt,
- als **approximativer** Test, falls Y beliebig verteilt mit bekannter Varianz σ^2 .

„Testrezept“ des **zweiseitigen Tests**:

- 1 Hypothesen: $H_0 : \mu = \mu_0$ gegen $H_1 : \mu \neq \mu_0$ für ein vorgegebenes $\mu_0 \in \mathbb{R}$.
- 2 Teststatistik:

$$N := \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \text{ mit } N \sim N(0, 1) \text{ (bzw. } N \overset{\bullet}{\sim} N(0, 1)), \text{ falls } H_0 \text{ gilt } (\mu = \mu_0).$$

- 3 Kritischer Bereich zum Signifikanzniveau α :

$$K = (-\infty, -N_{1-\frac{\alpha}{2}}) \cup (N_{1-\frac{\alpha}{2}}, \infty)$$

- 4 Berechnung der realisierten Teststatistik N
- 5 Entscheidung: H_0 ablehnen $\Leftrightarrow N \in K$.

Beispiel: Qualitätskontrolle (Länge von Stahlstiften)

- Untersuchungsgegenstand: Weicht die mittlere Länge der von einer bestimmten Maschine produzierten Stahlstifte von der Solllänge $\mu_0 = 10$ (in [cm]) ab, so dass die Produktion gestoppt werden muss?
- Annahmen: Für Länge Y der produzierten Stahlstifte gilt: $Y \sim N(\mu, 0.4^2)$
- Stichprobeninformation: Realisation einer einfachen Stichprobe vom Umfang $n = 64$ zu Y liefert Stichprobenmittel $\bar{x} = 9.7$.
- Gewünschtes Signifikanzniveau (max. Fehlerwahrscheinlichkeit 1. Art):
 $\alpha = 0.05$

Geeigneter Test:

(Exakter) Gauß-Test für den Mittelwert bei bekannter Varianz

- 1 Hypothesen: $H_0 : \mu = \mu_0 = 10$ gegen $H_1 : \mu \neq \mu_0 = 10$
- 2 Teststatistik: $N = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \sim N(0, 1)$, falls H_0 gilt ($\mu = \mu_0$)
- 3 Kritischer Bereich zum Niveau $\alpha = 0.05$:
 $K = (-\infty, -N_{0.975}) \cup (N_{0.975}, \infty) = (-\infty, -1.96) \cup (1.96, \infty)$
- 4 Realisierter Wert der Teststatistik: $N = \frac{9.7 - 10}{0.4} \sqrt{64} = -6$
- 5 Entscheidung: $N \in K \rightsquigarrow H_0$ wird abgelehnt und die Produktion gestoppt.

Einseitige Gauß-Tests

Wahl der Hypothesen

- Bei zweiseitigem Test: Hypothesentest zu

$$H_0 : \mu \neq \mu_0 \quad \text{gegen} \quad H_1 : \mu = \mu_0$$

zwar konstruierbar, aber ohne praktische Bedeutung.

- Neben zweiseitigem Test zwei (symmetrische) einseitige Varianten:

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \quad \text{gegen} \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$H_0 : \mu \geq \mu_0 \quad \text{gegen} \quad H_1 : \mu < \mu_0$$

- Konstruktion der Tests beschränkt Wahrscheinlichkeit, H_0 **fälschlicherweise abzulehnen**. Entscheidung zwischen beiden Varianten daher wie folgt:

H_0 : **Nullhypothese** ist in der Regel die Aussage, die von vornherein als glaubwürdig gilt und die man beibehält, wenn das Stichprobenergebnis bei Gültigkeit von H_0 nicht sehr untypisch bzw. überraschend ist.

H_1 : **Gegenhypothese** ist in der Regel die Aussage, die man statistisch absichern möchte und für deren Akzeptanz man hohe Evidenz fordert.

Die Entscheidung für H_1 hat typischerweise erhebliche Konsequenzen, so dass man das Risiko einer fälschlichen Ablehnung von H_0 zugunsten von H_1 kontrollieren will.

- Auch für einseitige Tests fasst Teststatistik

$$N = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \quad \text{mit} \quad N \sim N\left(\frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}, 1\right)$$

die empirische Information über den Erwartungswert μ geeignet zusammen.

- Allerdings gilt nun offensichtlich
 - ▶ im Falle des **rechtsseitigen** Tests von

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \quad \text{gegen} \quad H_1 : \mu > \mu_0 ,$$

dass **große (insbesondere positive)** Realisationen von N gegen H_0 und für H_1 sprechen, sowie

- ▶ im Falle des **linksseitigen** Tests von

$$H_0 : \mu \geq \mu_0 \quad \text{gegen} \quad H_1 : \mu < \mu_0 ,$$

dass **kleine (insbesondere negative)** Realisationen von N gegen H_0 und für H_1 sprechen.

- Noch nötig zur Konstruktion der Tests:
Geeignetes Verfahren zur Wahl der **kritischen Bereiche** so, dass Wahrscheinlichkeit für Fehler 1. Art durch vorgegebenes Signifikanzniveau α beschränkt bleibt.

Kritischer Bereich (rechtsseitiger Test)

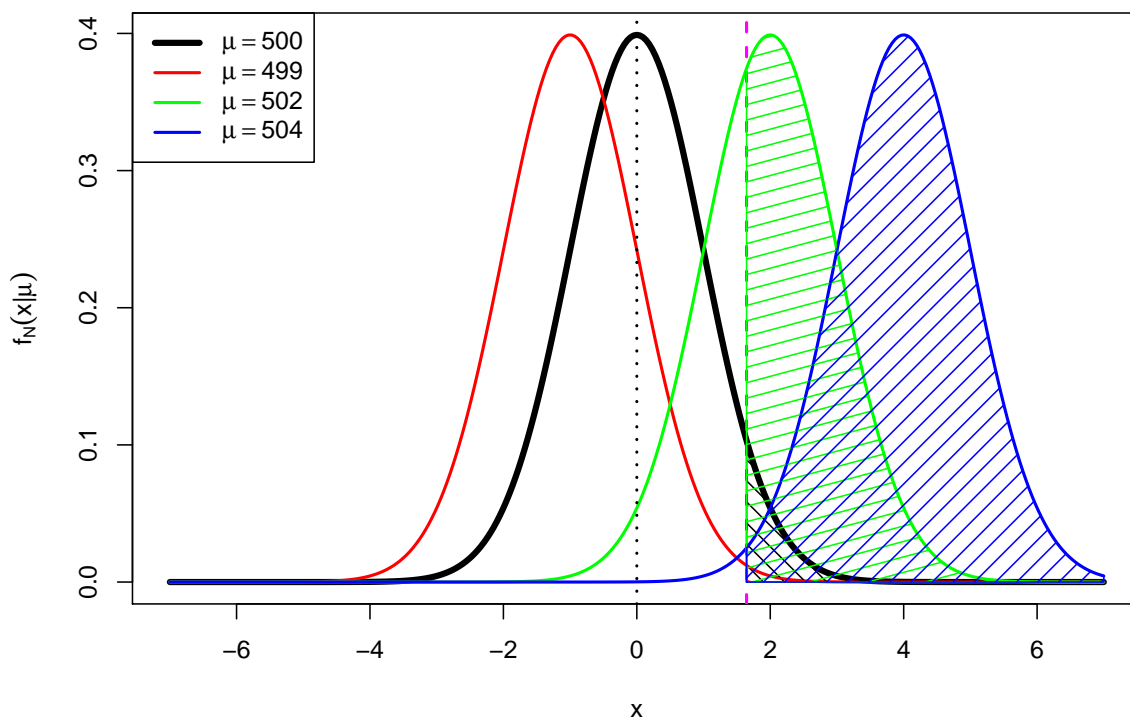
- Für **rechtsseitigen** Test muss also zur Konstruktion des kritischen Bereichs ein **kritischer Wert** bestimmt werden, den die Teststatistik N im Fall der Gültigkeit von H_0 **maximal** mit einer Wahrscheinlichkeit von α überschreitet.
- Gesucht ist also ein Wert k_α mit $P\{N \in (k_\alpha, \infty)\} \leq \alpha$ **für alle** $\mu \leq \mu_0$.
- Offensichtlich wird $P\{N \in (k_\alpha, \infty)\}$ mit wachsendem μ größer, es genügt also, die Einhaltung der Bedingung $P\{N \in (k_\alpha, \infty)\} \leq \alpha$ für das **größtmögliche** μ mit der Eigenschaft $\mu \leq \mu_0$, also $\mu = \mu_0$, zu gewährleisten.
- Um die Fehlerwahrscheinlichkeit 2. Art unter Einhaltung der Bedingung an die Fehlerwahrscheinlichkeit 1. Art möglichst klein zu halten, wird k_α gerade so gewählt, dass $P\{N \in (k_\alpha, \infty)\} = \alpha$ für $\mu = \mu_0$ gilt.
- Wegen $N \sim N(0, 1)$ für $\mu = \mu_0$ erhält man hieraus

$$\begin{aligned}
 & P\{N \in (k_\alpha, \infty)\} = \alpha \\
 \Leftrightarrow & \quad 1 - P\{N \in (-\infty, k_\alpha)\} = \alpha \\
 \Leftrightarrow & \quad \Phi(k_\alpha) = 1 - \alpha \\
 \Leftrightarrow & \quad k_\alpha = N_{1-\alpha}
 \end{aligned}$$

und damit insgesamt den kritischen Bereich $K = (N_{1-\alpha}, \infty)$ für den rechtsseitigen Test.

Beispiel für Verteilungen von N

Rechtsseitiger Test ($\mu_0 = 500$) zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$



Rechtsseitiger Gauß-Test

für den Mittelwert einer Zufallsvariablen mit bekannter Varianz

Anwendung

- als **exakter** Test, falls Y normalverteilt und $\text{Var}(Y) = \sigma^2$ bekannt,
- als **approximativer** Test, falls Y beliebig verteilt mit bekannter Varianz σ^2 .

„Testrezept“ des **rechtsseitigen Tests**:

- 1 Hypothesen: $H_0 : \mu \leq \mu_0$ gegen $H_1 : \mu > \mu_0$ für ein vorgegebenes $\mu_0 \in \mathbb{R}$.
- 2 Teststatistik:

$$N := \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \text{ mit } N \sim N(0, 1) \text{ (} N \overset{\bullet}{\sim} N(0, 1)\text{)}, \text{ falls } H_0 \text{ gilt (mit } \mu = \mu_0\text{)}.$$

- 3 Kritischer Bereich zum Signifikanzniveau α :

$$K = (N_{1-\alpha}, \infty)$$

- 4 Berechnung der realisierten Teststatistik N
- 5 Entscheidung: H_0 ablehnen $\Leftrightarrow N \in K$.

Kritischer Bereich (linksseitiger Test)

- Für **linksseitigen** Test muss zur Konstruktion des kritischen Bereichs ein **kritischer Wert** bestimmt werden, den die Teststatistik N im Fall der Gültigkeit von H_0 **maximal** mit einer Wahrscheinlichkeit von α unterschreitet.
- Gesucht ist also ein Wert k_α mit $P\{N \in (-\infty, k_\alpha)\} \leq \alpha$ **für alle** $\mu \geq \mu_0$.
- Offensichtlich wird $P\{N \in (-\infty, k_\alpha)\}$ mit fallendem μ größer, es genügt also, die Einhaltung der Bedingung $P\{N \in (-\infty, k_\alpha)\} \leq \alpha$ für das **kleinstmögliche** μ mit $\mu \geq \mu_0$, also $\mu = \mu_0$, zu gewährleisten.
- Um die Fehlerwahrscheinlichkeit 2. Art unter Einhaltung der Bedingung an die Fehlerwahrscheinlichkeit 1. Art möglichst klein zu halten, wird k_α gerade so gewählt, dass $P\{N \in (-\infty, k_\alpha)\} = \alpha$ für $\mu = \mu_0$ gilt.
- Wegen $N \sim N(0, 1)$ für $\mu = \mu_0$ erhält man hieraus

$$P\{N \in (-\infty, k_\alpha)\} = \alpha$$

$$\Leftrightarrow \Phi(k_\alpha) = \alpha$$

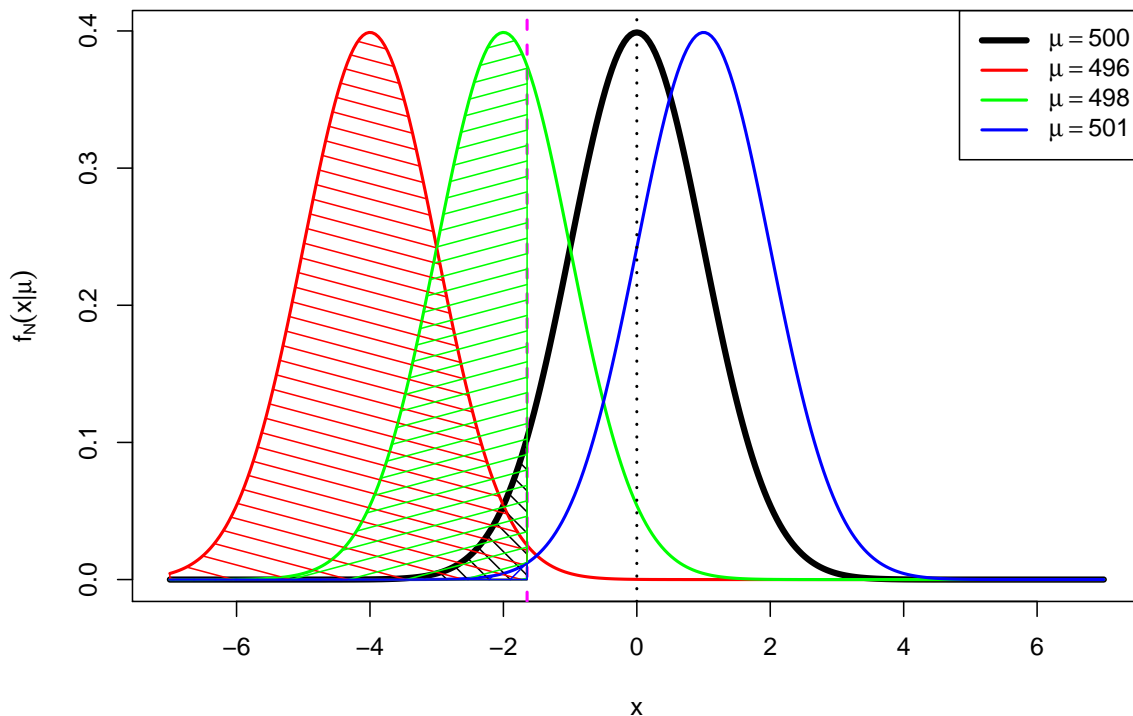
$$\Leftrightarrow k_\alpha = N_\alpha$$

$$\Leftrightarrow k_\alpha = -N_{1-\alpha}$$

und damit insgesamt den kritischen Bereich $K = (-\infty, -N_{1-\alpha})$ für den linksseitigen Test.

Beispiel für Verteilungen von N

Linksseitiger Test ($\mu_0 = 500$) zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$



Linksseitiger Gauß-Test

für den Mittelwert einer Zufallsvariablen mit bekannter Varianz

Anwendung

- als **exakter** Test, falls Y normalverteilt und $\text{Var}(Y) = \sigma^2$ bekannt,
- als **approximativer** Test, falls Y beliebig verteilt mit bekannter Varianz σ^2 .

„Testrezept“ des **linksseitigen Tests**:

- 1 Hypothesen: $H_0 : \mu \geq \mu_0$ gegen $H_1 : \mu < \mu_0$ für ein vorgegebenes $\mu_0 \in \mathbb{R}$.
- 2 Teststatistik:

$$N := \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \text{ mit } N \sim N(0, 1) \text{ (} N \overset{\bullet}{\sim} N(0, 1)\text{)}, \text{ falls } H_0 \text{ gilt (mit } \mu = \mu_0\text{)}.$$

- 3 Kritischer Bereich zum Signifikanzniveau α :

$$K = (-\infty, -N_{1-\alpha})$$

- 4 Berechnung der realisierten Teststatistik N
- 5 Entscheidung: H_0 ablehnen $\Leftrightarrow N \in K$.

Gütefunktionen einseitiger Gauß-Tests

- Gütefunktion allgemein: $G(\theta) = P\{T \in K\}$
- Für **rechtsseitigen** Gauß-Test:
 - ▶ $G(\mu) = P\{N \in (N_{1-\alpha}, \infty)\}$
 - ▶ Mit $N \sim N\left(\frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}, 1\right)$ erhält man

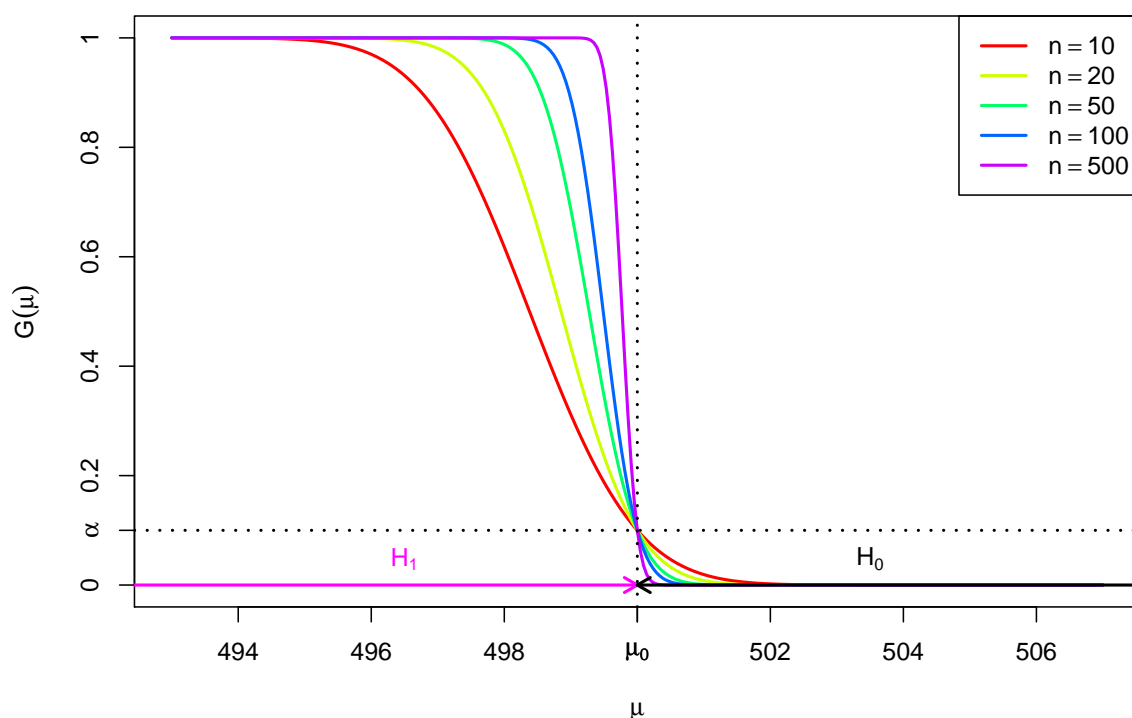
$$\begin{aligned} P\{N \in (N_{1-\alpha}, \infty)\} &= 1 - P\{N \leq N_{1-\alpha}\} \\ &= 1 - \Phi\left(N_{1-\alpha} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} - N_{1-\alpha}\right) \end{aligned}$$

- Für **linksseitigen** Gauß-Test:
 - ▶ $G(\mu) = P\{N \in (-\infty, -N_{1-\alpha})\}$
 - ▶ Mit $N \sim N\left(\frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}, 1\right)$ erhält man hier

$$\begin{aligned} P\{N \in (-\infty, -N_{1-\alpha})\} &= P\{N < -N_{1-\alpha}\} \\ &= \Phi\left(-N_{1-\alpha} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}\right) \end{aligned}$$

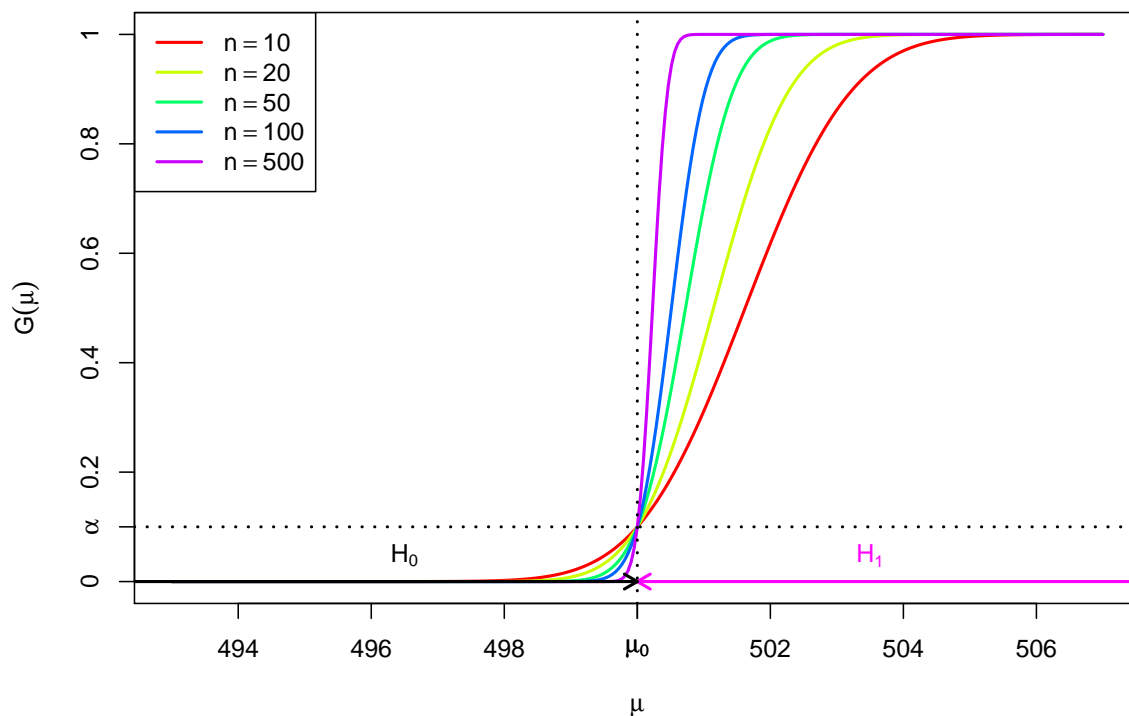
Beispiel für Gütefunktionen

Linksseitiger Test ($\mu_0 = 500$) zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.10$



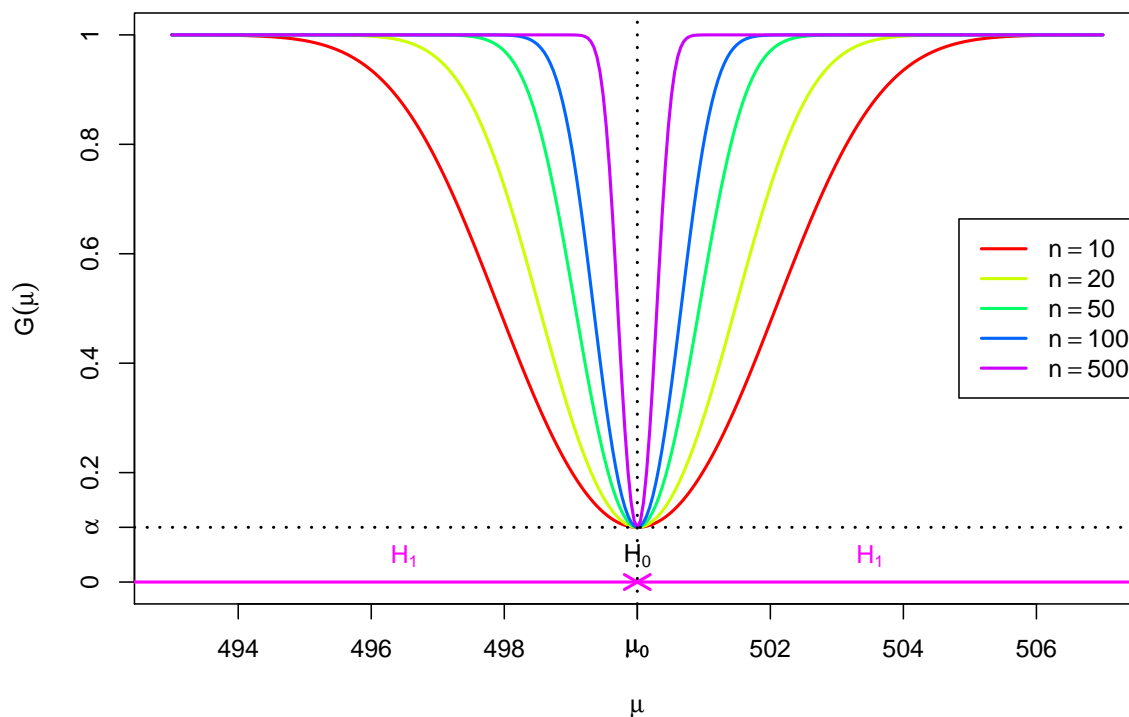
Beispiel für Gütefunktionen

Rechtsseitiger Test ($\mu_0 = 500$) zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.10$



Beispiel für Gütefunktionen

Zweiseitiger Test ($\mu_0 = 500$) zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.10$



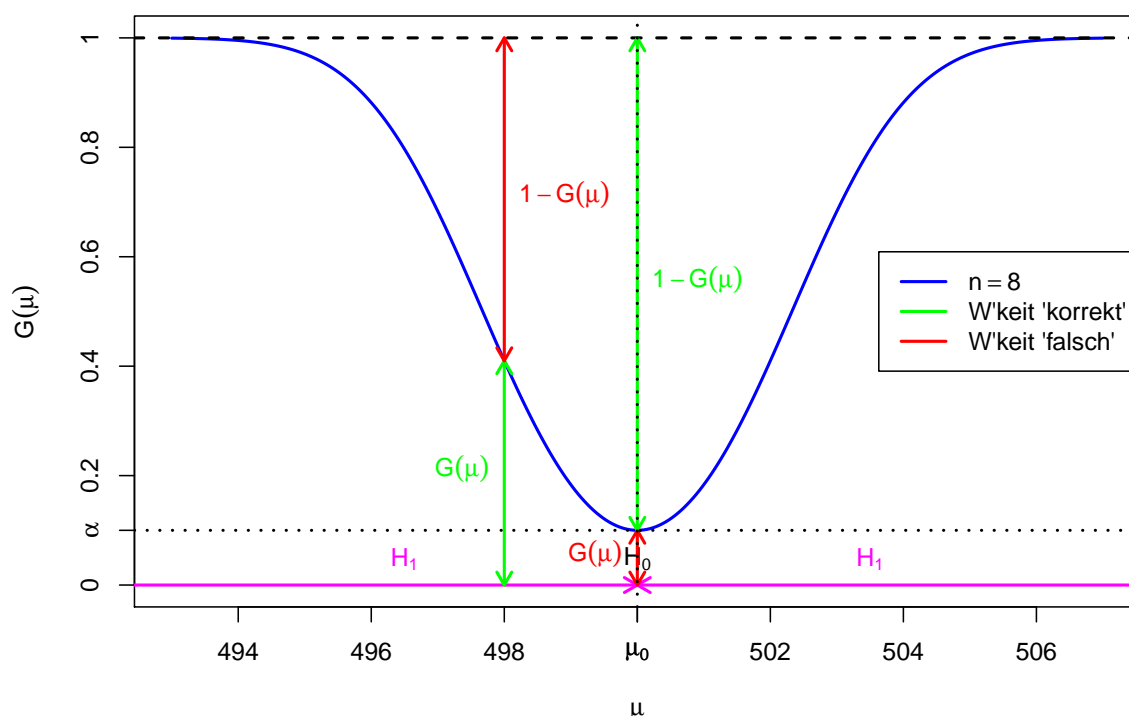
Gütefunktion und Fehlerwahrscheinlichkeiten

für Gauß-Tests auf den Mittelwert bei bekannter Varianz

- Entscheidungsregel (nicht nur) bei Gauß-Tests stets: H_0 ablehnen $\Leftrightarrow N \in K$
- Gütefunktion $G(\mu)$ gibt also für Gauß-Tests auf den Mittelwert bei bekannter Varianz zu jedem möglichen wahren Mittelwert μ die Wahrscheinlichkeit an, eine Stichprobenrealisation zu erhalten, die zu einer Entscheidung **gegen** H_0 führt.
- Dies kann — abhängig davon, ob für μ H_0 oder H_1 zutreffend ist — also die Wahrscheinlichkeit einer falschen bzw. richtigen Entscheidung sein (vgl. Folie 105).
- Gängige Abkürzung
 - ▶ für Fehlerwahrscheinlichkeiten 1. Art: $\alpha(\mu)$ für $\mu \in \Theta_0$,
 - ▶ für Fehlerwahrscheinlichkeiten 2. Art: $\beta(\mu)$ für $\mu \in \Theta_1$.
- Für $\mu \in \Theta_0$ (also bei Gültigkeit der Nullhypothese für μ) gilt also:
 - ▶ Fehlerwahrscheinlichkeit 1. Art: $\alpha(\mu) = G(\mu)$
 - ▶ Wahrscheinlichkeit richtiger Entscheidung: $1 - G(\mu)$
- Für $\mu \in \Theta_1$ (also bei Verletzung der Nullhypothese für μ) erhält man:
 - ▶ Fehlerwahrscheinlichkeit 2. Art: $\beta(\mu) = 1 - G(\mu)$
 - ▶ Wahrscheinlichkeit richtiger Entscheidung: $G(\mu)$

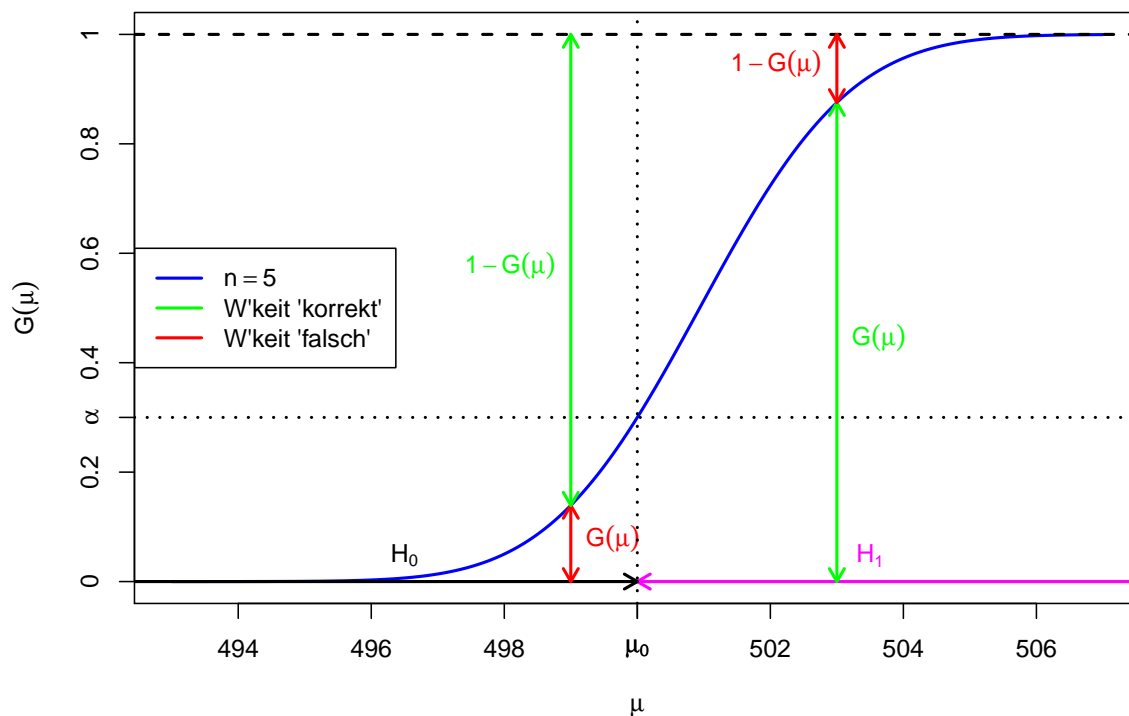
Gütefunktion und Fehlerwahrscheinlichkeiten

Zweiseitiger Test ($\mu_0 = 500$) zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.10$



Gütefunktion und Fehlerwahrscheinlichkeiten

Rechtsseitiger Test ($\mu_0 = 500$) zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.30$



Gütefunktion und Fehlerwahrscheinlichkeiten

Linksseitiger Test ($\mu_0 = 500$) zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.30$

