

## 2. Übungsblatt zum Wiederholungskurs Schließende Statistik SS 2024

### Aufgabe 2

Es werde angenommen, dass die Lebensdauer  $Y$  von Autobatterien [in Jahren] der folgenden Verteilungsfunktion genügt:

$$F_Y(y|\lambda) = F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{für } y \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda y^2} & \text{für } y > 0 \end{cases}, \quad \lambda > 0.$$

Bei 8 PKW stellte man folgende Lebensdauern der Autobatterien fest:

$$4, 3, 5, 7, 6, 9, 6, 8$$

Schätzen Sie den Parameter  $\lambda$  mit Hilfe der Momentenmethode.

*Hinweis:*  $E(Y) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$ .

### Aufgabe 3

Die Verteilung einer Zufallsvariablen  $Y$  sei in Abhängigkeit des unbekanntes Parameters  $a > 0$  durch die folgende Dichtefunktion gegeben:

$$f_Y(y|a) = \begin{cases} a^2 \cdot (y-1) \cdot e^{-a \cdot (y-1)} & \text{für } y > 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Der Parameter  $a$  soll auf Grundlage einer einfachen Stichprobe  $X_1, \dots, X_n$  vom Umfang  $n$  geschätzt werden.

- Bestimmen Sie den Schätzer  $\hat{a}_{ML}$  nach der Maximum-Likelihood-Methode.
- Man kann zeigen, dass  $E(Y) = \frac{2}{a} + 1$  gilt. Bestimmen Sie damit den Schätzer  $\hat{a}_{MM}$  nach der Methode der Momente.

*Hinweise:*

- Beachten Sie, dass Sie Teil (b) auch ohne die Bearbeitung von Teil (a) lösen können.
- Falls sich der ML-Schätzer als lokale Extremstelle einer differenzierbaren Funktion bestimmen lässt, muss **nicht** überprüft werden (z.B. mit Hilfe der 2. Ableitung), ob tatsächlich eine Maximalstelle vorliegt.

### Aufgabe 4

Eine Zufallsvariable  $Y$  besitze für ein  $\theta$  mit  $0 < \theta < 1$  die folgende Dichtefunktion:

$$f_Y(y|\theta) = \begin{cases} \frac{1-\theta}{\theta} \cdot y^{\frac{1-2\theta}{\theta}} & \text{für } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Eine einfache Stichprobe  $(X_1, \dots, X_n)$  zu  $Y$  ergab die Realisation  $(x_1, \dots, x_n)$ . Schätzen Sie den unbekannt Parameter  $\theta$  mit Hilfe der Maximum-Likelihoodmethode.

*Hinweis: Falls sich der ML-Schätzer als lokale Extremstelle einer differenzierbaren Funktion bestimmen lässt, muss **nicht** überprüft werden (z.B. mit Hilfe der 2. Ableitung), ob tatsächlich eine Maximalstelle vorliegt.*

### Aufgabe 5

Die Verteilung der Zufallsvariablen  $Y$ , die vom unbekannt Parameter  $\phi > 0$  abhängt, sei durch die Dichtefunktion

$$f_Y(y|\phi) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\phi}{2\pi y^3}} e^{-\phi \frac{(y-1)^2}{2y}} & \text{für } y > 0 \\ 0 & \text{für } y \leq 0 \end{cases}$$

gegeben.

Der Parameter  $\phi$  soll auf der Grundlage der einfachen Stichprobe  $(X_1, \dots, X_n)$  vom Umfang  $n$  zu  $Y$  mit Hilfe der Maximum-Likelihood-Methode geschätzt werden.

- Stellen Sie die logarithmierte Likelihoodfunktion  $\ln L(\phi)$  auf.
- Berechnen Sie den ML-Schätzer  $\hat{\phi}$  für  $\phi$ .

### Aufgabe 6

Die Verteilung einer Zufallsvariablen  $Y$  sei in Abhängigkeit des unbekannt Parameters  $a > 0$  durch die folgende Dichtefunktion gegeben:

$$f_Y(y|a) = \begin{cases} \frac{2}{a^2} \cdot y & \text{für } 0 \leq y \leq a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Der Parameter  $a$  soll auf Grundlage einer einfachen Stichprobe  $X_1, \dots, X_n$  vom Umfang  $n$  geschätzt werden.

- Zeigen Sie, dass  $E(Y) = \frac{2}{3} \cdot a$  gilt.
- Bestimmen Sie den Schätzer  $\hat{a}_{MM}$  nach der Methode der Momente.
- Bestimmen Sie den Schätzer  $\hat{a}_{ML}$  nach der Maximum-Likelihood-Methode.

*Hinweise:*

- Beachten Sie, dass Sie Teil (b) mit dem angegebenen Resultat auch ohne die Bearbeitung von Teil (a) lösen können.
- Falls sich der ML-Schätzer als lokale Extremstelle einer differenzierbaren Funktion bestimmen lässt, muss **nicht** überprüft werden (z.B. mit Hilfe der 2. Ableitung), ob tatsächlich eine Maximalstelle vorliegt.