

3. Übungsblatt zum Wiederholungskurs Schließende Statistik SS 2021

Aufgabe 7

Es sei X_1, \dots, X_n eine einfache Stichprobe zur Zufallsvariablen Y mit $E(Y) = \mu$, $\mu \in \mathbb{R}$, und $\text{Var}(Y) = \sigma^2$, $\sigma^2 > 0$.

- Zeigen Sie, dass \overline{X}^2 keine erwartungstreue Schätzfunktion für μ^2 ist.
- Geben Sie den Bias für die Schätzfunktion in Aufgabenteil (a) an.

Aufgabe 8

Es werde angenommen, dass die Verteilung einer Zufallsvariable Y in Abhängigkeit des unbekanntem Parameters $b > 0$ durch die Dichtefunktion

$$f_Y(y|b) = \begin{cases} b \cdot y^{b-1} & \text{falls } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben ist. Eine einfache Stichprobe (X_1, \dots, X_n) zu Y ergab die Realisation (x_1, \dots, x_n) . Prüfen Sie nach, ob \overline{X} eine erwartungstreue Schätzfunktion für b ist.

Aufgabe 9

Die Zufallsvariable Y sei alternativverteilt mit unbekanntem Parameter $p \in [0, 1]$, es gelte also insbesondere $E(Y) = p$ und $\text{Var}(Y) = p \cdot (1 - p)$. p soll mit Hilfe einer einfachen Stichprobe (X_1, X_2, X_3) vom Umfang 3 zu Y geschätzt werden.

- Welche der beiden Schätzfunktionen
 - $T_1 = \frac{1}{3} \cdot (X_1 + X_2 + X_3)$
 - $T_2 = (X_1 + X_2 - X_3)$sind erwartungstreu für p ? (Begründung!)
- Berechnen Sie die Varianz von T_1 und T_2 .
- Welche der beiden Schätzfunktionen würden Sie vorziehen? (Begründung!)

Aufgabe 10

Für $\lambda > 0$ sei $Y \sim \text{Pois}(\lambda)$ (es gilt also insbesondere $E(Y) = \text{Var}(Y) = \lambda$), X_1, \dots, X_n sei für $n \in \mathbb{N}$ eine einfache Stichprobe vom Umfang n zu Y .

- Zeigen Sie: Die Schätzfunktionen

$$T_n(X_1, \dots, X_n) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i^2 - X_i)$$

sind erwartungstreu für λ^2 .

- Welche Eigenschaft müssen die Schätzfunktionen T_n aus Teil (a) außerdem erfüllen, um für λ^2 konsistent im quadratischen Mittel zu sein?
(Die Gültigkeit dieser Eigenschaft ist **nicht** zu überprüfen!)

Aufgabe 11

Um eine Aussage über die Lebensdauer Y von Scheibenbremsen zu treffen, wurde in einer Stichprobe von 100 Autos die Lebensdauer der Scheibenbremsen gemessen. Man erhielt dabei den Durchschnittswert

$$\bar{x} = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} x_i = 60000 \text{ [km]}.$$

Es werde angenommen, dass die Lebensdauer Y als eine $N(\mu, 10000^2)$ -verteilte Zufallsvariable angesehen werden kann (x_1, \dots, x_{100}) Realisation einer einfachen Stichprobe (X_1, \dots, X_{100}) zu Y ist.

- Geben Sie ein (symmetrisches) Konfidenzintervall für die durchschnittliche Lebensdauer der Scheibenbremsen zur Sicherheitswahrscheinlichkeit $1 - \alpha = 0.95$ an.
- Wie groß muss der Stichprobenumfang mindestens sein, damit die Abweichung $|\bar{X} - \mu|$ mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% kleiner als 5000 ist?

Aufgabe 12

Zur Intervallschätzung des Erwartungswerts $\mu := E(Y)$ einer normalverteilten Zufallsvariablen Y mit bekannter Varianz $\sigma^2 = 2^2$ auf Grundlage der Realisation x_1, \dots, x_9 einer einfachen Stichprobe X_1, \dots, X_9 vom Umfang 9 zu Y soll ein symmetrisches Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau $1 - \alpha = 0.99$ für μ bestimmt werden.

- Wie breit ist ein solches Konfidenzintervall stets?
- Geben Sie das realisierte Konfidenzintervall für μ zur folgenden Stichprobenrealisation an:

18.21, 20.37, 23.18, 17.74, 19.84, 20.26, 21.42, 19.52, 23.97

Aufgabe 13

12 Versuchsflächen wurden mit einer neuen Weizensorte bestellt. Diese Flächen erbrachten folgende Hektarerträge (in dz):

35.6, 33.7, 37.8, 31.2, 37.2, 34.1, 35.8, 36.6, 37.1, 34.9, 35.6, 34.0

Es werde angenommen, dass die obigen Hektarerträge Realisationen einer einfachen Stichprobe X_1, X_2, \dots, X_{12} zur Zufallsvariablen Y sind, welche $N(\mu, \sigma^2)$ verteilt ist für ein $\mu \in \mathbb{R}$ und ein $\sigma^2 > 0$. Geben Sie ein symmetrisches Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau $1 - \alpha = 0.95$ für μ an.

Aufgabe 14

In einer Befragungsaktion möchte man den Anteil der Haushalte, die einen DVD-Recorder besitzen, ermitteln. Eine Befragung von 400 Haushalten ergab, dass 80 von ihnen über einen DVD-Recorder verfügten.

- Geben Sie zur Sicherheitswahrscheinlichkeit $1 - \alpha = 0.90$ ein zweiseitiges Konfidenzintervall für unbekanntem Anteil p der Haushalte an, die über einen DVD-Recorder verfügen.
- Wie breit ist das in Teil (a) berechnete Konfidenzintervall?
- Welche Breite hätte das resultierende Konfidenzintervall, wenn 200 der befragten Haushalte angegeben hätten, über einen DVD-Recorder zu verfügen?

Hinweis: Verwenden Sie den folgenden Ausschnitt aus der Tabelle für gängige Quantile der t -Verteilungen.

$n \setminus p$	0.85	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.9995
399	1.038	1.284	1.649	1.966	2.336	2.588	3.315