**Universität des Saarlandes**
**Lehrstab Statistik**
**PD Dr. Martin Becker**

**2. Übungsblatt zum Wiederholungskurs**
**Schließende Statistik SS 2021**

## Aufgabe 2

Es werde angenommen, dass die Lebensdauer $Y$ von Autobatterien [in Jahren] der folgenden Verteilungsfunktion genügt:

$$F_Y(y|\lambda) = F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad y \leq 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-\lambda y^2} & \text{für} \quad y > 0 \end{cases}, \quad \lambda > 0.$$

Bei 8 PKW stellte man folgende Lebensdauern der Autobatterien fest:

$$4, 3, 5, 7, 6, 9, 6, 8$$

Schätzen Sie den Parameter $\lambda$ mit Hilfe der Momentenmethode.
*Hinweis:* $\mathrm{E}(Y) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$.

## Aufgabe 3

Die Verteilung einer Zufallsvariablen $Y$ sei in Abhängigkeit des unbekannten Parameters $a > 0$ durch die folgende Dichtefunktion gegeben:

$$f_Y(y|a) = \begin{cases} a^2 \cdot (y-1) \cdot e^{-a\cdot(y-1)} & \text{für } y > 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Der Parameter $a$ soll auf Grundlage einer einfachen Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ vom Umfang $n$ geschätzt werden.

(a) Bestimmen Sie den Schätzer $\widehat{a}_{ML}$ nach der Maximum-Likelihood-Methode.

(b) Man kann zeigen, dass $\mathrm{E}(Y) = \frac{2}{a} + 1$ gilt. Bestimmen Sie damit den Schätzer $\widehat{a}_{MM}$ nach der Methode der Momente.

*Hinweise:*

- *Beachten Sie, dass Sie Teil (b) auch ohne die Bearbeitung von Teil (a) lösen können.*
- *Falls sich der ML-Schätzer als lokale Extremstelle einer differenzierbaren Funktion bestimmen lässt, muss* **nicht** *überprüft werden (z.B. mit Hilfe der 2. Ableitung), ob tatsächlich eine Maximalstelle vorliegt.*

## Aufgabe 4

Eine Zufallsvariable $Y$ besitze für ein $\theta$ mit $0 < \theta < 1$ die folgende Dichtefunktion:

$$f_Y(y|\theta) = \begin{cases} \frac{1-\theta}{\theta} \cdot y^{\frac{1-2\theta}{\theta}} & \text{für } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Eine einfache Stichprobe $(X_1, \ldots, X_n)$ zu $Y$ ergab die Realisation $(x_1, \ldots, x_n)$. Schätzen Sie den unbekannten Parameter $\theta$ mit Hilfe der Maximum-Likelihoodmethode.

*Hinweis: Falls sich der ML-Schätzer als lokale Extremstelle einer differenzierbaren Funktion bestimmen lässt, muss* **nicht** *überprüft werden (z.B. mit Hilfe der 2. Ableitung), ob tatsächlich eine Maximalstelle vorliegt.*

Aufgabe 5

Die Verteilung der Zufallsvariablen $Y$, die vom unbekannten Parameter $\phi > 0$ abhängt, sei durch die Dichtefunktion

$$f_Y(y|\phi) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{\phi}{2\pi y^3}}\mathrm{e}^{-\phi\dfrac{(y-1)^2}{2y}} & \text{für} \quad y > 0 \\ 0 & \text{für} \quad y \leq 0 \end{cases}$$

gegeben.

Der Parameter $\phi$ soll auf der Grundlage der einfachen Stichprobe $(X_1, \ldots, X_n)$ vom Umfang $n$ zu $Y$ mit Hilfe der Maximum-Likelihood-Methode geschätzt werden.

a) Stellen Sie die logarithmierte Likelihoodfunktion $\ln L(\phi)$ auf.

b) Berechnen Sie den ML-Schätzer $\widehat{\phi}$ für $\phi$.

Aufgabe 6

Die Verteilung einer Zufallsvariablen $Y$ sei in Abhängigkeit des unbekannten Parameters $a > 0$ durch die folgende Dichtefunktion gegeben:

$$f_Y(y|a) = \begin{cases} \dfrac{2}{a^2} \cdot y & \text{für } 0 \leq y \leq a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Der Parameter $a$ soll auf Grundlage einer einfachen Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ vom Umfang $n$ geschätzt werden.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{E}(Y) = \dfrac{2}{3} \cdot a$ gilt.

(b) Bestimmen Sie den Schätzer $\widehat{a}_{MM}$ nach der Methode der Momente.

(c) Bestimmen Sie den Schätzer $\widehat{a}_{ML}$ nach der Maximum-Likelihood-Methode.

*Hinweise:*

- *Beachten Sie, dass Sie Teil (b) mit dem angegebenen Resultat auch ohne die Bearbeitung von Teil (a) lösen können.*
- *Falls sich der ML-Schätzer als lokale Extremstelle einer differenzierbaren Funktion bestimmen lässt, muss* **nicht** *überprüft werden (z.B. mit Hilfe der 2. Ableitung), ob tatsächlich eine Maximalstelle vorliegt.*