

**Einige Ergebnisse zum 9. Übungsblatt zum Wiederholungskurs  
 Deskriptive Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung WS 2023/24**

*Diese Ergebnisse sollen dazu dienen, bei einigen Aufgaben bereits vor Veröffentlichung der Online-Lösungen überprüfen zu können, ob man die Aufgabe richtig bearbeitet hat.*

Aufgabe 38

- (a) Siehe Teil (b).  
 (b) Um Randverteilungen ergänzte (gemeinsame) Wahrscheinlichkeitstabelle:

$X \setminus Y$	0	1	2	$p_{i\cdot}$
0	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{4}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

- (c)  $P(\{X \leq 1, Y \leq 1\}) = \frac{11}{18}$   
 (d)  $X$  und  $Y$  sind nicht stochastisch unabhängig.

Aufgabe 39

- (a) Vollständige Tabelle:

$X \setminus Y$	2	3	4	$p_{i\cdot}$
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
3	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{8}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{4}$	1

- (b) Nein.  
 (c) Ergebnisse: Berechnung der Wahrscheinlichkeiten:

$$(i) P\{1 \leq X \leq 2, 2 \leq Y \leq 3\} = \frac{7}{16},$$

$$(ii) P\{X \leq 2\} = \frac{5}{8},$$

$$(iii) P\{X > 2, Y < 3\} = \frac{1}{4}.$$

(d)  $p_{X|Y=3}(x)$ :

$x_i$	1	2	3	$\Sigma$
$p_{X Y=3}(x_i)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

$p_{Y|X=1}(y)$ :

$y_j$	2	3	4	$\Sigma$
$p_{Y X=1}(y_j)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

#### Aufgabe 40

(a) Tabelle ergänzt um Randverteilungen:

$X \setminus Y$	1	2	3	$p_{i\cdot}$
0	0.1	0.2	0.2	0.5
1	0.2	0.1	0.2	0.5
$p_{\cdot j}$	0.3	0.3	0.4	1

(b) Es gilt:

- $E(X) = 0.5$
- $E(Y) = 2.1$
- $\text{Var}(X) = 0.25$
- $\text{Var}(Y) = 0.69$
- $\text{Cov}(X, Y) = -0.05$
- $\text{Korr}(X, Y) = -0.12039$

(c)  $\text{Korr}(X, Y) \neq 0 \Rightarrow X, Y$  nicht stochastisch unabhängig.

(d)  $E(2 \cdot X + 3 \cdot Y) = 7.3$

$$\text{Var}(2 \cdot X + 3 \cdot Y) = 6.61$$

### Aufgabe 41

(a) Randdichte  $f_X$ :

$$f_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f_X(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2} & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Randdichte  $f_Y$ :

$$f_Y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{4} - \frac{1}{4}y & \text{für } 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

(b) *Nur ausführliche Lösung verfügbar.*

(c) Bedingte Dichtefunktion  $f_{X|Y=y}$ :

$$f_{X|Y=y} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f_{X|Y=y}(x) = \begin{cases} \frac{2x - y + 2}{3 - y} & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, 0 \leq y \leq 2$$

(d)  $E(X) = \frac{7}{12} = 0.58333$ ,  $\text{Var}(X) = \frac{11}{144} = 0.07639$ ,

$E(Y) = \frac{5}{6} = 0.83333$ ,  $\text{Var}(Y) = \frac{11}{36} = 0.30556$ .

(e)  $\text{Cov}(X, Y) = \frac{1}{72} = 0.01389$ ,  $\text{Korr}(X, Y) = \frac{1}{11} = 0.09091$ .

### Aufgabe 42

(a)  $-3 \leq \text{Cov}(X, Y) \leq 3$

(b) Mit  $\text{Korr}(X, Y) = -0.5$  gilt:

(i)  $\text{Cov}(2X, -3Y) = 9$

(ii)  $E(2X - 3Y + 4) = 9$

(iii)  $\text{Var}(2X - 3Y + 4) = 57$

(c)  $E(3X^2 - 3Y^2) = 225$