

Momente höherdimensionaler Zufallsvektoren

Definition 10.10

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)'$ ein n -dimensionaler Zufallsvektor. Dann heißt der n -dimensionale Vektor

$$E(\mathbf{X}) := [E(X_1), \dots, E(X_n)]' = \begin{bmatrix} E(X_1) \\ \vdots \\ E(X_n) \end{bmatrix}$$

Erwartungswertvektor von \mathbf{X} und die $n \times n$ -Matrix

$$V(\mathbf{X}) := E[(\mathbf{X} - E(\mathbf{X})) \cdot (\mathbf{X} - E(\mathbf{X}))'] \\ := \begin{bmatrix} E[(X_1 - E(X_1)) \cdot (X_1 - E(X_1))] & \cdots & E[(X_1 - E(X_1)) \cdot (X_n - E(X_n))] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ E[(X_n - E(X_n)) \cdot (X_1 - E(X_1))] & \cdots & E[(X_n - E(X_n)) \cdot (X_n - E(X_n))] \end{bmatrix}$$

(Varianz-)Kovarianzmatrix von \mathbf{X} .

- Ein n -dimensionaler Zufallsvektor $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)'$ bzw. die n eindimensionalen Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n heißen **unkorreliert**, wenn $V(\mathbf{X})$ eine Diagonalmatrix ist, also höchstens die Diagonaleinträge von 0 verschieden sind.
- Es gilt in Verallgemeinerung von Folie 287 (bei Existenz der Momente):

$$X_1, \dots, X_n \text{ stochastisch unabhängig} \Rightarrow X_1, \dots, X_n \text{ unkorreliert,}$$

die Umkehrung gilt *im allgemeinen* nicht!

- Dass stochastische Unabhängigkeit eine stärkere Eigenschaft ist als Unkorreliertheit, zeigt auch der folgende Satz:

Satz 10.2

Seien für $n \in \mathbb{N}$ stochastisch unabhängige Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n über einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) sowie \mathcal{B} - \mathcal{B} -messbare Funktionen $G_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ für $i \in \{1, \dots, n\}$ gegeben.

Dann sind auch die Zufallsvariablen $G_1(X_1), \dots, G_n(X_n)$ stochastisch unabhängig.

Es gilt $V(\mathbf{X})$

$$= \begin{bmatrix} \text{Cov}(X_1, X_1) & \text{Cov}(X_1, X_2) & \cdots & \text{Cov}(X_1, X_{n-1}) & \text{Cov}(X_1, X_n) \\ \text{Cov}(X_2, X_1) & \text{Cov}(X_2, X_2) & \cdots & \text{Cov}(X_2, X_{n-1}) & \text{Cov}(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \text{Cov}(X_{n-1}, X_1) & \text{Cov}(X_{n-1}, X_2) & \cdots & \text{Cov}(X_{n-1}, X_{n-1}) & \text{Cov}(X_{n-1}, X_n) \\ \text{Cov}(X_n, X_1) & \text{Cov}(X_n, X_2) & \cdots & \text{Cov}(X_n, X_{n-1}) & \text{Cov}(X_n, X_n) \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \text{Var}(X_1) & \text{Cov}(X_1, X_2) & \cdots & \text{Cov}(X_1, X_{n-1}) & \text{Cov}(X_1, X_n) \\ \text{Cov}(X_2, X_1) & \text{Var}(X_2) & \cdots & \text{Cov}(X_2, X_{n-1}) & \text{Cov}(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \text{Cov}(X_{n-1}, X_1) & \text{Cov}(X_{n-1}, X_2) & \cdots & \text{Var}(X_{n-1}) & \text{Cov}(X_{n-1}, X_n) \\ \text{Cov}(X_n, X_1) & \text{Cov}(X_n, X_2) & \cdots & \text{Cov}(X_n, X_{n-1}) & \text{Var}(X_n) \end{bmatrix}$$

- Der Eintrag v_{ij} der i -ten Zeile und j -ten Spalte von $V(\mathbf{X})$ ist also gegeben durch $\text{Cov}(X_i, X_j)$.
- $V(\mathbf{X})$ ist wegen $\text{Cov}(X_i, X_j) = \text{Cov}(X_j, X_i)$ offensichtlich symmetrisch.
- Für $n = 1$ erhält man die „klassische“ Definition der Varianz, das heißt die Matrix $V(\mathbf{X})$ wird als 1×1 -Matrix skalar und stimmt mit $\text{Var}(X_1)$ überein.

Momente von Summen von Zufallsvariablen

- Regelmäßig ist man für $n \in \mathbb{N}$ an der Verteilung bzw. an Maßzahlen der Summe $\sum_{i=1}^n X_i = X_1 + \dots + X_n$ oder einer gewichteten Summe

$$\sum_{i=1}^n w_i \cdot X_i = w_1 \cdot X_1 + \dots + w_n \cdot X_n \quad (w_1, \dots, w_n \in \mathbb{R})$$

von n Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n interessiert.

- In Verallgemeinerung von Folie 282 zeigt man für den Erwartungswert leicht

$$E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i) \quad \text{bzw.} \quad E\left(\sum_{i=1}^n w_i \cdot X_i\right) = \sum_{i=1}^n w_i \cdot E(X_i).$$

- Insbesondere gilt für das (arithmetische) Mittel aus X_1, \dots, X_n

$$E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i).$$

- In Verallgemeinerung von Folie 288 erhält man für die Varianz weiter

$$\begin{aligned}\text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \text{Cov}(X_i, X_j) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) + \sum_{\substack{i,j \in \{1, \dots, n\} \\ i \neq j}} \text{Cov}(X_i, X_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \text{Cov}(X_i, X_j)\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}\text{Var}\left(\sum_{i=1}^n w_i \cdot X_i\right) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i \cdot w_j \cdot \text{Cov}(X_i, X_j) \\ &= \sum_{i=1}^n w_i^2 \cdot \text{Var}(X_i) + \sum_{\substack{i,j \in \{1, \dots, n\} \\ i \neq j}} w_i \cdot w_j \cdot \text{Cov}(X_i, X_j) \\ &= \sum_{i=1}^n w_i^2 \cdot \text{Var}(X_i) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n w_i \cdot w_j \cdot \text{Cov}(X_i, X_j).\end{aligned}$$

Summen von Zufallsvariablen spezieller Verteilungen

- Sind die Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n nicht nur unkorreliert, sondern sogar unabhängig, dann sind einige der erläuterten Verteilungsfamilien „abgeschlossen“ gegenüber Summenbildungen.
- Besitzen darüberhinaus alle n Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n exakt dieselbe Verteilung, spricht man von unabhängig identisch verteilten Zufallsvariablen gemäß folgender Definition:

Definition 11.1 (i.i.d. Zufallsvariablen)

Seien für $n \in \mathbb{N}$ Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n über einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) gegeben mit

- $Q_X := P_{X_1} = P_{X_2} = \dots = P_{X_n}$,
- X_1, \dots, X_n stochastisch unabhängig.

Dann heißen die Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n **unabhängig identisch verteilt (independent and identically distributed)** gemäß Q_X , in Zeichen: $X_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} Q_X$ oder $X_i \stackrel{u.i.v.}{\sim} Q_X$ für $i \in \{1, \dots, n\}$.

- Sind X_1, \dots, X_n unkorreliert, so vereinfacht sich die Varianz der Summe wegen $\text{Cov}(X_i, X_j) = 0$ für $i \neq j$ offensichtlich zu

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i)$$

bzw.

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^n w_i \cdot X_i\right) = \sum_{i=1}^n w_i^2 \cdot \text{Var}(X_i).$$

- Fasst man die Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n im n -dimensionalen Zufallsvektor $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)'$ und die Gewichte w_1, \dots, w_n im Vektor $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)' \in \mathbb{R}^n$ zusammen, so lassen sich die Ergebnisse kürzer darstellen als

$$E\left(\sum_{i=1}^n w_i \cdot X_i\right) = \mathbf{w}' E(\mathbf{X}) \quad \text{bzw.} \quad \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n w_i \cdot X_i\right) = \mathbf{w}' V(\mathbf{X}) \mathbf{w}.$$

Satz 11.1 (Summen spezieller Zufallsvariablen)

Seien $n \in \mathbb{N}$, X_1, \dots, X_n stochastisch unabhängige Zufallsvariablen und

$$Y := X_1 + \dots + X_n = \sum_{i=1}^n X_i.$$

Gilt für $i \in \{1, \dots, n\}$ weiterhin

- $X_i \sim B(1, p)$ für ein $p \in (0, 1)$, also insgesamt $X_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} B(1, p)$, so gilt $Y \sim B(n, p)$ (vgl. Folie 232),
- $X_i \sim B(n_i, p)$ für $n_i \in \mathbb{N}$ und ein $p \in (0, 1)$, so gilt $Y \sim B(N, p)$ mit $N := n_1 + \dots + n_n = \sum_{i=1}^n n_i$,
- $X_i \sim \text{Pois}(\lambda_i)$ für $\lambda_i \in \mathbb{R}_+$, so gilt $Y \sim \text{Pois}(\lambda)$ mit $\lambda := \lambda_1 + \dots + \lambda_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i$,
- $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ für $\mu_i \in \mathbb{R}$ und $\sigma_i^2 > 0$, so gilt $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ mit $\mu = \mu_1 + \dots + \mu_n = \sum_{i=1}^n \mu_i$ und $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$,
- $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ für ein $\mu \in \mathbb{R}$ und ein $\sigma^2 > 0$, also insgesamt $X_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$, so gilt für $\bar{X} := \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ insbesondere $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$.

Der zentrale Grenzwertsatz

- Die Verteilung von Summen (insbesondere) unabhängig identisch verteilter Zufallsvariablen weist ein spezielles Grenzverhalten auf, wenn die Anzahl der summierten Zufallsvariablen wächst.
- Dieses Grenzverhalten ist wesentlicher Grund für großes Anwendungspotenzial der (Standard-)Normalverteilung.
- Betrachte im Folgenden für $i \in \mathbb{N}$ unabhängig identisch verteilte Zufallsvariablen X_i mit $E(X_i) = \mu_X \in \mathbb{R}$ und $\text{Var}(X_i) = \sigma_X^2 > 0$.
- Gilt $n \rightarrow \infty$ für die Anzahl n der summierten Zufallsvariablen X_i , gilt für die Summen $Y_n := \sum_{i=1}^n X_i$ offensichtlich $\text{Var}(Y_n) = n \cdot \sigma_X^2 \rightarrow \infty$ und für $\mu_X \neq 0$ auch $E(Y_n) = n \cdot \mu_X \rightarrow \pm\infty$, eine Untersuchung der Verteilung von Y_n für $n \rightarrow \infty$ ist also schwierig.
- Stattdessen: Betrachtung der **standardisierten** Zufallsvariablen

$$Z_n := \frac{Y_n - E(Y_n)}{\sqrt{\text{Var}(Y_n)}} = \frac{(\sum_{i=1}^n X_i) - n\mu_X}{\sigma_X \sqrt{n}} = \frac{(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i) - \mu_X}{\sigma_X} \sqrt{n}$$

mit $E(Z_n) = 0$ und $\text{Var}(Z_n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

- Gemäß folgendem Satz „konvergiert“ die Verteilung der Z_n für $n \rightarrow \infty$ gegen eine Standardnormalverteilung:

Das schwache Gesetz der großen Zahlen

- Eine direkte Folge von Satz 11.2 ist zum Beispiel das folgende Resultat:

Satz 11.3 (Schwachtes Gesetz der großen Zahlen)

Es seien X_i für $i \in \mathbb{N}$ unabhängig identisch verteilte Zufallsvariablen mit $E(X_i) = \mu_X \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right) - \mu_X \right| \geq \varepsilon \right\} = 0 \quad \text{für alle } \varepsilon > 0$$

- Das schwache Gesetz der großen Zahlen besagt also, dass die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Mittelwert von n i.i.d. Zufallsvariablen betragsmäßig um mehr als eine vorgegebene (kleine) Konstante $\varepsilon > 0$ vom Erwartungswert der Zufallsvariablen abweicht, für $n \rightarrow \infty$ gegen Null geht.
- Insbesondere „konvergiert“ also die Folge der beobachteten relativen Häufigkeiten der Erfolge bei unabhängiger wiederholter Durchführung eines Bernoulli-Experiments gegen die Erfolgswahrscheinlichkeit p .
- Letztendlich ist dies auch eine Rechtfertigung für den häufigkeitsbasierten Wahrscheinlichkeitsbegriff!

Satz 11.2 (Zentraler Grenzwertsatz)

Es seien X_i für $i \in \mathbb{N}$ unabhängig identisch verteilte Zufallsvariablen mit $E(X_i) = \mu_X \in \mathbb{R}$ und $\text{Var}(X_i) = \sigma_X^2 > 0$. Für $n \in \mathbb{N}$ seien die Summen $Y_n := \sum_{i=1}^n X_i$ bzw. die standardisierten Summen bzw. Mittelwerte

$$Z_n := \frac{Y_n - E(Y_n)}{\sqrt{\text{Var}(Y_n)}} = \frac{(\sum_{i=1}^n X_i) - n\mu_X}{\sigma_X \sqrt{n}} = \frac{(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i) - \mu_X}{\sigma_X} \sqrt{n}$$

von X_1, \dots, X_n definiert.

Dann gilt für die Verteilungsfunktionen F_{Z_n} der Zufallsvariablen Z_n

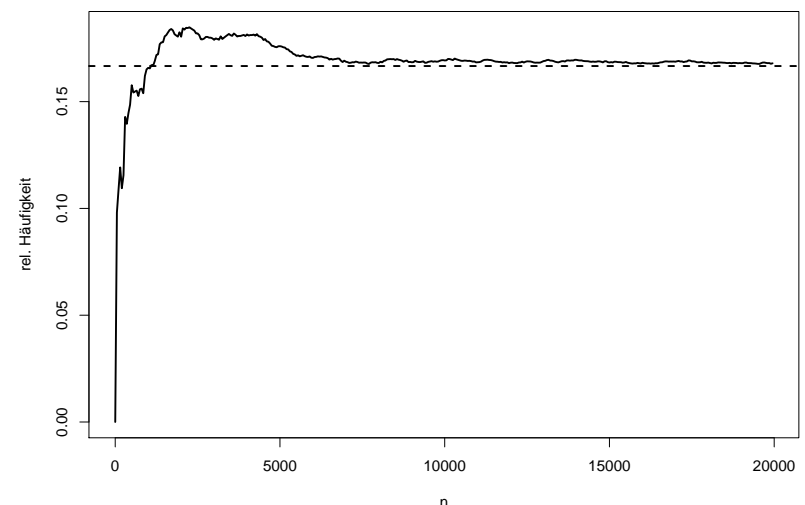
$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{Z_n}(z) = F_{N(0,1)}(z) = \Phi(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{R},$$

man sagt auch, die Folge Z_n von Zufallsvariablen konvergiere in Verteilung gegen die Standardnormalverteilung, in Zeichen $Z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N(0, 1)$.

- Mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes lassen sich insbesondere
 - weitere (schwächere oder speziellere) Grenzwertsätze zeigen,
 - Wahrscheinlichkeiten von Summen von i.i.d. Zufallsvariablen näherungsweise mit Hilfe der Standardnormalverteilung auswerten.

Veranschaulichung „Schwachtes Gesetz der großen Zahlen“

(relative Häufigkeit des Auftretens der Zahl 6 beim Würfeln)



Grenzwertsatz von de Moivre-Laplace

- *Erinnerung:* (siehe Satz 11.1, Folie 296)
Summen i.i.d. bernoulliverteilter Zufallsvariablen sind binomialverteilt.
- Die Anwendung des zentralen Grenzwertsatzes 11.2 auf binomialverteilte Zufallsvariablen als Summen i.i.d. bernoulliverteilter Zufallsvariablen führt zur (zumindest historisch wichtigen und beliebten) Näherung von Binomialverteilungen durch Normalverteilungen.
- Resultat ist auch als eigenständiger Grenzwertsatz bekannt:

Satz 11.4 (Grenzwertsatz von de Moivre-Laplace)

Für $n \in \mathbb{N}$ und $p \in (0, 1)$ sei $Y_n \sim B(n, p)$. Dann konvergieren die standardisierten Zufallsvariablen

$$Z_n := \frac{Y_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

in Verteilung gegen die Standardnormalverteilung, es gilt also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{Z_n}(z) = F_{N(0,1)}(z) = \Phi(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{R}.$$

Beispiele I

zur Anwendung des zentralen Grenzwertsatzes

Für $Y_n \sim B(n, p)$ erhält man (mit $E(Y_n) = np$ und $\text{Var}(Y_n) = np(1-p)$) beispielsweise die Näherung

$$P\{Y_n \leq z\} = F_{Y_n}(z) \approx F_{N(np, np(1-p))}(z) = \Phi\left(\frac{z - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

oder gleichbedeutend

$$\begin{aligned} P\{Y_n \leq z\} &= P\left\{\frac{Y_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{z - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right\} = P\left\{Z_n \leq \frac{z - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right\} \\ &\approx F_{N(0,1)}\left(\frac{z - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) = \Phi\left(\frac{z - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right). \end{aligned}$$

Anwendung der Grenzwertsätze für Näherungen

- Grenzwertsätze treffen nur Aussagen für $n \rightarrow \infty$.
- In praktischen Anwendungen wird verwendet, dass diese Aussagen für endliche, aber hinreichend große n , schon „näherungsweise“ gelten.
- Eine häufige verwendete „Faustregel“ zur Anwendung des Grenzwertsatzes von de Moivre-Laplace ist zum Beispiel $np(1-p) \geq 9$.
- (Äquivalente!) Anwendungsmöglichkeit der Grenzwertsätze für endliches n : Verwendung

▶ der $N(n\mu_X, n\sigma_X^2)$ -Verteilung für $Y_n := \sum_{i=1}^n X_i$ oder

▶ der $N\left(\mu_X, \frac{\sigma_X^2}{n}\right)$ -Verteilung für $\bar{X}_n := \frac{1}{n}Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ oder

▶ der Standardnormalverteilung für $Z_n := \frac{Y_n - n\mu_X}{\sigma_X\sqrt{n}} = \frac{\bar{X}_n - \mu_X}{\sigma_X}\sqrt{n}$

mit $\mu_X = E(X_i)$ und $\sigma_X^2 = \text{Var}(X_i)$ statt der jeweiligen exakten Verteilung.

- Gilt $X_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(\mu_X, \sigma_X^2)$, stimmen die „Näherungen“ sogar mit den exakten Verteilungen überein (siehe Folie 296)!

Beispiele II

zur Anwendung des zentralen Grenzwertsatzes

Gilt $Y \sim B(5000, 0.2)$, so erhält man für die Wahrscheinlichkeit, dass Y Werte > 1000 und ≤ 1050 annimmt, näherungsweise

$$\begin{aligned} P\{1000 < Y \leq 1050\} &= F_Y(1050) - F_Y(1000) \\ &\approx \Phi\left(\frac{1050 - 5000 \cdot 0.2}{\sqrt{5000 \cdot 0.2 \cdot (1-0.2)}}\right) - \Phi\left(\frac{1000 - 5000 \cdot 0.2}{\sqrt{5000 \cdot 0.2 \cdot (1-0.2)}}\right) \\ &= \Phi(1.77) - \Phi(0) = 0.9616 - 0.5 = 0.4616 \end{aligned}$$

(Exakte Wahrscheinlichkeit: 0.4538)

Beispiele III

zur Anwendung des zentralen Grenzwertsatzes

Seien $X_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} \text{Pois}(5)$ für $i \in \{1, \dots, 100\}$ (es gilt also $E(X_i) = 5$ und $\text{Var}(X_i) = 5$), sei $Y := \sum_{i=1}^{100} X_i$. Dann gilt für das untere Quartil $y_{0.25}$ von Y

$$F_Y(y_{0.25}) \approx F_{N(100 \cdot 5, 100 \cdot 5)}(y_{0.25}) = \Phi\left(\frac{y_{0.25} - 500}{\sqrt{500}}\right) \stackrel{!}{=} 0.25$$

und unter Verwendung von $\Phi(z) = 1 - \Phi(-z)$ bzw. $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$ weiter

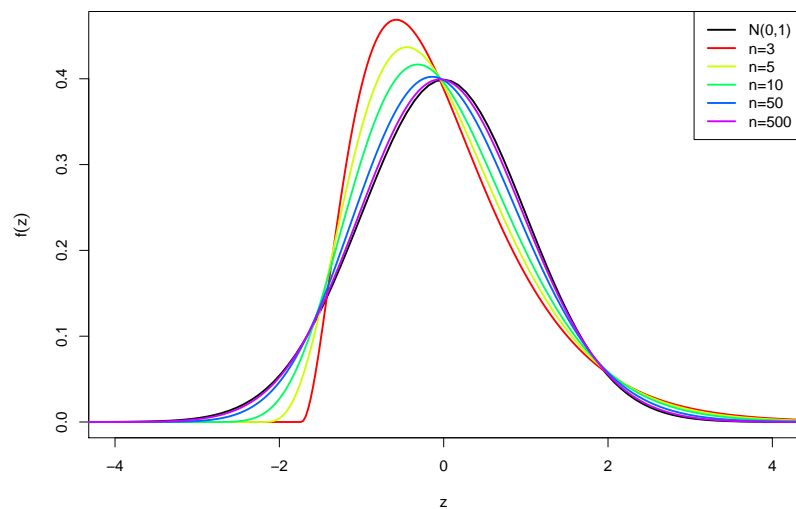
$$\Phi\left(\frac{500 - y_{0.25}}{\sqrt{500}}\right) \stackrel{!}{=} 1 - 0.25 = 0.75 \Rightarrow \frac{500 - y_{0.25}}{\sqrt{500}} = \Phi^{-1}(0.75) \approx 0.675$$

$$\Rightarrow y_{0.25} \approx 500 - 0.675 \cdot \sqrt{500} = 484.9065$$

(exaktes unteres Quartil unter Verwendung von $Y \sim \text{Pois}(500)$): $y_{0.25} = 485$)

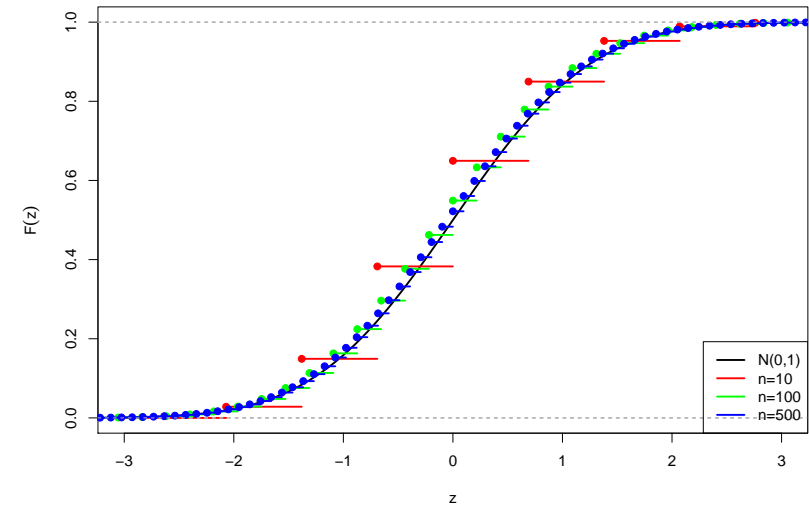
Veranschaulichung des zentralen Grenzwertsatzes

an der Dichtefunktion standardisierter Summen von Exponentialverteilungen mit $\lambda = 2$



Veranschaulichung des zentralen Grenzwertsatzes

an der Verteilungsfunktion standardisierter Binomialverteilungen $B(n, p)$ mit $p = 0.3$



Veranschaulichung des zentralen Grenzwertsatzes

an der Dichtefunktion standardisierter Summen von Unif(20, 50)-Verteilungen

