

(Lineare) Abbildungen von Zufallsvariablen I

- Genauso, wie man mit Hilfe einer $\mathcal{F} - \mathcal{B}$ -messbaren Abbildung $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ als Zufallsvariable über einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) einen neuen Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$ erhält, kann aus diesem mit einer „nachgeschalteten“ $\mathcal{B} - \mathcal{B}$ -messbaren Abbildung $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ein weiterer Wahrscheinlichkeitsraum gewonnen werden!

- Mehrere „Auffassungen“ möglich:

- 1 G als Zufallsvariable über $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$ durch

$$(P_X)_G(B) = P_X(G^{-1}(B)) \text{ für alle } B \in \mathcal{B}.$$

- 2 $G(X) := G \circ X$ als Zufallsvariable über (Ω, \mathcal{F}, P) durch

$$P_{G(X)}(B) = P((G \circ X)^{-1}(B)) = P(X^{-1}(G^{-1}(B))) \text{ für alle } B \in \mathcal{B}.$$

- Man erkennt leicht, dass beide Auffassungen miteinander vereinbar sind (es gilt $(P_X)_G = P_{G(X)}$), daher Schreibweise $G(X)$ auch geläufig, wenn (Ω, \mathcal{F}, P) nicht im Vordergrund steht.

(Lineare) Abbildungen von Zufallsvariablen II

- Im Folgenden: Betrachtung besonders einfacher (linearer) Abbildungen G , also Abbildungen der Form $G(x) = a \cdot x + b$ für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$.
- Man kann zeigen, dass G (als stetige Funktion) stets $\mathcal{B} - \mathcal{B}$ -messbar ist.
- **Problemstellung:** Wie kann die Verteilung von $Y := G(X)$ (möglichst leicht!) aus der Verteilung von X gewonnen werden?
- **Idee:** Abbildung G ist insbesondere bijektiv, es existiert also die **Umkehrfunktion** $G^{-1}(y) = \frac{y - b}{a}$.
- Für diskrete Zufallsvariablen X mit Trägerpunkten x_i und zugehöriger Wahrscheinlichkeitsfunktion p_X ist offensichtlich auch Y diskret mit
 - ▶ Trägerpunkten $y_i = a \cdot x_i + b$ und
 - ▶ Wahrscheinlichkeitsfunktion $p_Y(y) = P_Y(\{y\}) = P_X(\{\frac{y-b}{a}\}) = p_X(\frac{y-b}{a})$.
 (Es gilt also $p_i = p_X(x_i) = p_Y(a \cdot x_i + b) = p_Y(y_i)$)
- Ähnlich lassen sich zu $Y = G(X)$ auch Dichtefunktionen f_Y (bei stetigen Zufallsvariablen X) aus f_X sowie (allgemein) Verteilungsfunktionen F_Y aus F_X bestimmen:

Satz 9.1

Es seien X eine (eindimensionale) Zufallsvariable, $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ und $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Abbildung mit $G(x) = ax + b$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann ist $Y := G(X) = aX + b$ ebenfalls eine Zufallsvariable und es gilt

$$F_Y(y) = \left\{ \begin{array}{ll} F_X\left(\frac{y-b}{a}\right) & \text{für } a > 0 \\ 1 - F_X\left(\frac{y-b}{a} - 0\right) & \text{für } a < 0 \end{array} \right\} \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R}.$$

- Ist X diskret und p_X die Wahrscheinlichkeitsfunktion von X , so ist auch Y diskret und die Wahrscheinlichkeitsfunktion p_Y von Y gegeben durch:

$$p_Y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; p_Y(y) = p_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

- Ist X stetig und f_X eine Dichtefunktion von X , so ist auch Y stetig und

$$f_Y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f_Y(y) := \frac{1}{|a|} \cdot f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

eine Dichtefunktion zu Y .

Erwartungswert von Zufallsvariablen I

- Analog zur Lage- und Streuungsmaßen in deskriptiver Statistik:
Oft Verdichtung der Information aus Verteilungen von Zufallsvariablen auf eine oder wenige Kennzahlen erforderlich.
- Kennzahl für **Lage** der Verteilung: **Erwartungswert**
- Zur allgemeinen Definition „zuviel“ Maß- und Integrationstheorie erforderlich, daher Beschränkung auf diskrete und stetige Zufallsvariablen (separat).
- In deskriptiver Statistik: Arithmetischer Mittelwert eines Merkmals als (mit den relativen Häufigkeiten) gewichtetes Mittel der aufgetretenen Merkmalswerte.
- Bei diskreten Zufallsvariablen analog: Erwartungswert als (mit den Punktwahrscheinlichkeiten) gewichtetes Mittel der Trägerpunkte.

Erwartungswert von Zufallsvariablen II

Definition 9.5 (Erwartungswerte diskreter Zufallsvariablen)

Es sei X eine diskrete Zufallsvariable mit Trägerpunkten x_i und Wahrscheinlichkeitsfunktion p_X . Gilt

$$\sum_{x_i} |x_i| \cdot p_X(x_i) < \infty, \quad (3)$$

so heißt

$$\mu_X := EX := E(X) := \sum_{x_i} x_i \cdot p_X(x_i)$$

der **Erwartungswert (Mittelwert)** der Zufallsvariablen X .

Gilt (3) nicht, so sagt man, der Erwartungswert von X existiere nicht.

Erwartungswert von Zufallsvariablen III

- Anders als in deskriptiver Statistik: Erwartungswert einer Zufallsvariablen existiert möglicherweise nicht!
- Existenzbedingungen sind zwar (auch in anderen Definitionen) angeführt, bei den hier betrachteten Zufallsvariablen sind diese aber stets erfüllt.
- Ist der Träger $T(X)$ einer diskreten Zufallsvariablen X endlich, so existiert $E(X)$ stets (Summe endlich).
- Gilt spezieller $T(X) = \{a\}$ für ein $a \in \mathbb{R}$, d.h. gilt $p_X(a) = 1$ und $p_X(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq a$, dann nennt man die Verteilung von X eine **Einpunktverteilung** und es gilt offensichtlich $E(X) = a$.
- Für stetige Zufallsvariablen ist die Summation durch ein Integral, die Wahrscheinlichkeitsfunktion durch eine Dichtefunktion und die Trägerpunkte durch die Integrationsvariable zu ersetzen:

Erwartungswert von Zufallsvariablen IV

Definition 9.6 (Erwartungswerte stetiger Zufallsvariablen)

Es sei X eine stetige Zufallsvariable und f_X eine Dichtefunktion von X . Gilt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| \cdot f_X(x) dx < \infty, \quad (4)$$

so heißt

$$\mu_X := EX := E(X) := \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x) dx$$

der **Erwartungswert (Mittelwert)** der Zufallsvariablen X .

Gilt (4) nicht, so sagt man, der Erwartungswert von X existiere nicht.

Symmetrie

Definition 9.7 (Symmetrische Zufallsvariablen)

Eine Zufallsvariable X über einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) heißt **symmetrisch** um $a \in \mathbb{R}$, falls die Verteilungen von $X - a$ und $a - X$ übereinstimmen.

- Alternative (äquivalente) Bedingungen

- ▶ für beliebige Zufallsvariablen X :

$$P_X(\{X \leq a + x\}) = P_X(\{X \geq a - x\}) \quad \text{bzw.} \quad F_X(a + x) = 1 - F_X(a - x - 0)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

- ▶ für diskrete Zufallsvariablen X :

Für alle $x_i \in T(X)$ gilt $2a - x_i \in T(X)$ und spezieller $p_X(x_i) = p_X(2a - x_i)$.

- ▶ für stetige Zufallsvariablen X :

Es existiert eine Dichte f_X von X mit

$$f_X(a + x) = f_X(a - x) \quad \text{bzw.} \quad f_X(x) = f_X(2a - x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

- Existiert der Erwartungswert $E(X)$ von X und ist X symmetrisch um $a \in \mathbb{R}$, dann gilt stets $a = E(X)$.

Erwartungswert von $G(X)$

- Zur Einführung weiterer Kennzahlen für Verteilung einer Zufallsvariablen X nötig: Erwartungswerte von Transformationen $G(X)$ für verschiedene (nicht nur lineare) $\mathcal{B} - \mathcal{B}$ -messbare Abbildungen $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Definition 9.8

Es seien X eine Zufallsvariable und $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine $\mathcal{B} - \mathcal{B}$ -messbare Abbildung.

- Ist X diskrete Zufallsvariable, x_i die Trägerpunkte sowie p_X die Wahrscheinlichkeitsfunktion von X und gilt $\sum_{x_i} |G(x_i)| \cdot p_X(x_i) < \infty$, dann existiert der Erwartungswert $E(G(X))$ und es gilt

$$E(G(X)) = \sum_{x_i} G(x_i) \cdot p_X(x_i).$$

- Ist X stetige Zufallsvariable mit Dichtefunktion f_X und gilt $\int_{-\infty}^{+\infty} |G(x)| \cdot f_X(x) dx < \infty$, dann existiert der Erwartungswert $E(G(X))$ und es gilt

$$E(G(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x) \cdot f_X(x) dx.$$

Höhere Momente von Zufallsvariablen

Definition 9.9 (*k*-te Momente, Varianz, Standardabweichung)

Es seien X eine (eindimensionale) Zufallsvariable, $k \in \mathbb{N}$.

- Man bezeichnet den Erwartungswert $E(X^k)$ (falls er existiert) als das **Moment k -ter Ordnung (um Null)** von X .
- Existiert $E(X)$, so bezeichnet man den Erwartungswert $E[(X - E(X))^k]$ (falls er existiert) als das **zentrale Moment k -ter Ordnung** von X .
- Das zweite zentrale Moment heißt auch **Varianz** von X , und man schreibt $\sigma_X^2 := \text{Var}(X) := E[(X - E(X))^2] = E[(X - \mu_X)^2]$.
- Die positive Wurzel der Varianz von X heißt auch **Standardabweichung** von X , und man schreibt $\sigma_X := \text{Sd}(X) := +\sqrt{\sigma_X^2}$.

Rechenregeln für Erwartungswerte und Varianz I

Satz 9.2

Es seien X eine (eindimensionale) Zufallsvariable, $a, b \in \mathbb{R}$.

- Existiert $E(X)$, so existiert auch der Erwartungswert von $aX + b$ und es gilt:

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

- Existiert $\text{Var}(X)$, so existiert auch die Varianz von $aX + b$ und es gilt:

$$\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$$

Für die Standardabweichung gilt dann $\text{Sd}(aX + b) = |a| \text{Sd}(X)$.

Rechenregeln für Erwartungswerte und Varianz II

Satz 9.3 (Varianzzerlegungssatz)

Es sei X eine (eindimensionale) Zufallsvariable. Dann existiert die Varianz $\text{Var}(X)$ genau dann, wenn $E(X^2)$ (und $E(X)$) existiert, und in diesem Fall gilt:

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

- Die Eigenschaft aus Satz 9.2, den „Erwartungswertoperator“ $E(\cdot)$ mit linearen Abbildungen vertauschen zu dürfen, lässt sich zum Beispiel wie folgt verallgemeinern:

Es seien X eine (eindimensionale) Zufallsvariable, $a, b \in \mathbb{R}$ sowie $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zwei $\mathcal{B} - \mathcal{B}$ -messbare Abbildungen.

Existieren $E(G(X))$ und $E(H(X))$, dann gilt:

$$E(aG(X) + bH(X)) = aE(G(X)) + bE(H(X))$$

Rechenregeln für Erwartungswerte und Varianz III

- Mit Satz 9.2 folgt direkt:

Ist X eine Zufallsvariable mit existierendem Erwartungswert $E(X)$ und existierender Varianz $\text{Var}(X)$, so erhält man mit

$$Y := \frac{X - E(X)}{\sqrt{\text{Var}(X)}} = \frac{X - E(X)}{\text{Sd}(X)} = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X}$$

*eine neue Zufallsvariable mit $E(Y) = 0$ und $\text{Var}(Y) = \text{Sd}(Y) = 1$.
Man nennt Y dann eine **standardisierte Zufallsvariable**.*

Schiefe und Wölbung von Zufallsvariablen I

Definition 9.10 (Schiefe (Skewness), Wölbung (Kurtosis))

Sei X eine (eindimensionale) Zufallsvariable mit existierender Varianz $\sigma_X^2 > 0$.

- ① Existiert das zentrale Moment 3. Ordnung, so nennt man

$$\gamma_X := \gamma(X) := \frac{E[(X - E(X))^3]}{\sigma_X^3} = E \left[\left(\frac{X - \mu_X}{\sigma_X} \right)^3 \right]$$

die **Schiefe (Skewness)** von X .

- ② Existiert das zentrale Moment 4. Ordnung, so nennt man

$$\kappa_X := \kappa(X) := \frac{E[(X - E(X))^4]}{\sigma_X^4} = E \left[\left(\frac{X - \mu_X}{\sigma_X} \right)^4 \right]$$

die **Wölbung (Kurtosis)** von X .

Die um 3 verminderte Kurtosis $\kappa_X - 3$ wird auch **Exzess-Kurtosis** genannt.

Schiefe und Wölbung von Zufallsvariablen II

- Ist X symmetrisch, so ist die Schiefe von X (falls sie existiert) gleich Null. Die Umkehrung der Aussage gilt **nicht**.
- Existieren Schiefe bzw. Kurtosis einer Zufallsvariablen X , so existieren auch die Schiefe bzw. Kurtosis von $Y := aX + b$ für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ und es gilt:
 - ▶ $\gamma_X = \gamma_Y$ sowie $\kappa_X = \kappa_Y$, falls $a > 0$,
 - ▶ $\gamma_X = -\gamma_Y$ sowie $\kappa_X = \kappa_Y$, falls $a < 0$.
- In Abhängigkeit von γ_X heißt die Verteilung von X
 - ▶ **linkssteil** oder **rechtsschief**, falls $\gamma_X > 0$ gilt und
 - ▶ **rechtssteil** oder **linksschief**, falls $\gamma_X < 0$ gilt.

Schiefe und Wölbung von Zufallsvariablen III

- In Abhängigkeit von κ_X heißt die Verteilung von X
 - ▶ **platykurtisch** oder **flachgipflig**, falls $\kappa_X < 3$ gilt,
 - ▶ **mesokurtisch** oder **normalgipflig**, falls $\kappa_X = 3$ gilt und
 - ▶ **leptokurtisch** oder **steilgipflig**, falls $\kappa_X > 3$ gilt.
- γ_X und κ_X können (auch wenn sie existieren) nicht beliebige Werte annehmen. Es gilt stets $\kappa_X \geq 1$ und $\gamma_X^2 \leq \kappa_X - 1$.
- Man kann (zur einfacheren Berechnung von γ_X und κ_X) leicht zeigen:
 - ▶
$$\begin{aligned} E[(X - E(X))^3] &= E(X^3) - 3 E(X^2) E(X) + 2[E(X)]^3 \\ &= E(X^3) - 3\mu_X \sigma_X^2 - \mu_X^3 \end{aligned}$$
 - ▶
$$\begin{aligned} E[(X - E(X))^4] &= E(X^4) - 4 E(X^3) E(X) + 6 E(X^2)[E(X)]^2 - 3[E(X)]^4 \\ &= E(X^4) - 4 E(X^3)\mu_X + 6\mu_X^2 \sigma_X^2 + 3\mu_X^4 \end{aligned}$$

Beispiel

zu stetiger Zufallsvariable X aus Folie 208 mit Dichte $f_X(x) = \begin{cases} 6(x - x^2) & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.

$$\bullet E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x) dx = \int_0^1 (6x^2 - 6x^3) dx = \left[2x^3 - \frac{3}{2}x^4 \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\bullet E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f_X(x) dx = \int_0^1 (6x^3 - 6x^4) dx = \left[\frac{3}{2}x^4 - \frac{6}{5}x^5 \right]_0^1 = \frac{3}{10}$$

$$\Rightarrow \text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{3}{10} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{20}$$

$$\bullet E(X^3) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 \cdot f_X(x) dx = \int_0^1 (6x^4 - 6x^5) dx = \left[\frac{6}{5}x^5 - x^6 \right]_0^1 = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \gamma(X) = \frac{\frac{1}{5} - 3 \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3}{(1/20)^{3/2}} = \frac{\frac{4-9+5}{20}}{(1/20)^{3/2}} = 0$$

$$\bullet E(X^4) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 \cdot f_X(x) dx = \int_0^1 (6x^5 - 6x^6) dx = \left[x^6 - \frac{6}{7}x^7 \right]_0^1 = \frac{1}{7}$$

$$\Rightarrow \kappa(X) = \frac{\frac{1}{7} - 4 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} + 6 \cdot \frac{3}{10} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4}{(1/20)^2} = \frac{3/560}{1/400} = \frac{15}{7}$$