(Lineare) Abbildungen von Zufallsvariablen I

- Genauso, wie man mit Hilfe einer $\mathcal{F}-\mathcal{B}-$messbaren Abbildung $X : \Omega \to \mathbb{R}$ als Zufallsvariable über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ einen neuen Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$ erhält, kann aus diesem mit einer „nachgeschalteten" $\mathcal{B}-\mathcal{B}-$messbaren Abbildung $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein weiterer Wahrscheinlichkeitsraum gewonnen werden!
- Mehrere „Auffassungen" möglich:
  1. G als Zufallsvariable über $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$ durch
  $$(P_X)_G(B) = P_X(G^{-1}(B)) \text{ für alle } B \in \mathcal{B}.$$
  2. $G(X) := G \circ X$ als Zufallsvariable über $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ durch
  $$P_{G(X)}(B) = P((G \circ X)^{-1}(B)) = P(X^{-1}(G^{-1}(B))) \text{ für alle } B \in \mathcal{B}.$$
- Man erkennt leicht, dass beide Auffassungen miteinander vereinbar sind (es gilt $(P_X)_G = P_{G(X)}$), daher Schreibweise $G(X)$ auch geläufig, wenn $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ nicht im Vordergrund steht.

(Lineare) Abbildungen von Zufallsvariablen II

- Im Folgenden: Betrachtung besonders einfacher (linearer) Abbildungen G, also Abbildungen der Form $G(x) = a \cdot x + b$ für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$.
- Man kann zeigen, dass G (als stetige Funktion) stets $\mathcal{B}-\mathcal{B}-$messbar ist.
- **Problemstellung:** Wie kann die Verteilung von $Y := G(X)$ (möglichst leicht!) aus der Verteilung von X gewonnen werden?
- **Idee:** Abbildung G ist insbesondere bijektiv, es existiert also die **Umkehrfunktion** $G^{-1}(y) = \frac{y-b}{a}$.
- Für diskrete Zufallsvariablen X mit Trägerpunkten x_i und zugehöriger Wahrscheinlichkeitsfunktion p_X ist offensichtlich auch Y diskret mit
  - Trägerpunkten $y_i = a \cdot x_i + b$ und
  - Wahrscheinlichkeitsfunktion $p_Y(y) = P_Y(\{y\}) = P_X(\{\frac{y-b}{a}\}) = p_X(\frac{y-b}{a})$.

  (Es gilt also $p_i = p_X(x_i) = p_Y(a \cdot x_i + b) = p_Y(y_i)$)
- Ähnlich lassen sich zu $Y = G(X)$ auch Dichtefunktionen f_Y (bei stetigen Zufallsvariablen X) aus f_X sowie (allgemein) Verteilungsfunktionen F_Y aus F_X bestimmen:

Satz 9.1

Es seien X eine (eindimensionale) Zufallsvariable, $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ und $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Abbildung mit $G(x) = ax + b$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann ist $Y := G(X) = aX + b$ ebenfalls eine Zufallsvariable und es gilt

$$F_Y(y) = \left\{ \begin{array}{cc} F_X(\frac{y-b}{a}) & \text{für } a > 0 \\ 1 - F_X(\frac{y-b}{a} - 0) & \text{für } a < 0 \end{array} \right\} \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R}.$$

- *Ist X diskret und p_X die Wahrscheinlichkeitsfunktion von X, so ist auch Y diskret und die Wahrscheinlichkeitsfunktion p_Y von Y gegeben durch:*

$$p_Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; p_Y(y) = p_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

- *Ist X stetig und f_X eine Dichtefunktion von X, so ist auch Y stetig und*

$$f_Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f_Y(y) := \frac{1}{|a|} \cdot f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

  eine Dichtefunktion zu Y.

Erwartungswert von Zufallsvariablen I

- Analog zur Lage- und Streuungsmaßen in deskriptiver Statistik:
  Oft Verdichtung der Information aus Verteilungen von Zufallsvariablen auf eine oder wenige Kennzahlen erforderlich.
- Kennzahl für **Lage** der Verteilung: **Erwartungswert**
- Zur allgemeinen Definition „zuviel“ Maß- und Integrationstheorie erforderlich, daher Beschränkung auf diskrete und stetige Zufallsvariablen (separat).
- In deskriptiver Statistik: Arithmetischer Mittelwert eines Merkmals als (mit den relativen Häufigkeiten) gewichtetes Mittel der aufgetretenen Merkmalswerte.
- Bei diskreten Zufallsvariablen analog: Erwartungswert als (mit den Punktwahrscheinlichkeiten) gewichtetes Mittel der Trägerpunkte.

Erwartungswert von Zufallsvariablen II

Definition 9.5 (Erwartungswerte diskreter Zufallsvariablen)

Es sei X eine diskrete Zufallsvariable mit Trägerpunkten x_i und Wahrscheinlichkeitsfunktion p_X. Gilt

$$\sum_{x_i} |x_i| \cdot p_X(x_i) < \infty, \tag{3}$$

so heißt

$$\mu_X := \mathrm{E}\, X := \mathrm{E}(X) := \sum_{x_i} x_i \cdot p_X(x_i)$$

der **Erwartungswert (Mittelwert)** *der Zufallsvariablen X.*
Gilt (3) nicht, so sagt man, der Erwartungswert von X existiere nicht.

Erwartungswert von Zufallsvariablen III

- Anders als in deskriptiver Statistik: Erwartungswert einer Zufallsvariablen existiert möglicherweise nicht!
- Existenzbedingungen sind zwar (auch in anderen Definitionen) angeführt, bei den hier betrachteten Zufallsvariablen sind diese aber stets erfüllt.
- Ist der Träger $T(X)$ einer diskreten Zufallsvariablen X endlich, so existiert $\mathrm{E}(X)$ stets (Summe endlich).
- Gilt spezieller $T(X) = \{a\}$ für ein $a \in \mathbb{R}$, d.h. gilt $p_X(a) = 1$ und $p_X(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq a$, dann nennt man die Verteilung von X eine **Einpunktverteilung** und es gilt offensichtlich $\mathrm{E}(X) = a$.
- Für stetige Zufallsvariablen ist die Summation durch ein Integral, die Wahrscheinlichkeitsfunktion durch eine Dichtefunktion und die Trägerpunkte durch die Integrationsvariable zu ersetzen:

Erwartungswert von Zufallsvariablen IV

Definition 9.6 (Erwartungswerte stetiger Zufallsvariablen)

Es sei X eine stetige Zufallsvariable und f_X eine Dichtefunktion von X. Gilt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| \cdot f_X(x)dx < \infty, \tag{4}$$

so heißt

$$\mu_X := \mathrm{E}\,X := \mathrm{E}(X) := \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x)dx$$

der **Erwartungswert (Mittelwert)** *der Zufallsvariablen X.*
Gilt (4) nicht, so sagt man, der Erwartungswert von X existiere nicht.

Symmetrie

Definition 9.7 (Symmetrische Zufallsvariablen)

Eine Zufallsvariable X über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ heißt **symmetrisch** *um $a \in \mathbb{R}$, falls die Verteilungen von $X - a$ und $a - X$ übereinstimmen.*

- Alternative (äquivalente) Bedingungen
  - für beliebige Zufallsvariablen X:

    $$P_X(\{X \leq a + x\}) = P_X(\{X \geq a - x\}) \quad \text{bzw.} \quad F_X(a + x) = 1 - F_X(a - x - 0)$$

    für alle $x \in \mathbb{R}$.
  - für diskrete Zufallsvariablen X:
    Für alle $x_i \in T(X)$ gilt $2a - x_i \in T(X)$ und spezieller $p_X(x_i) = p_X(2a - x_i)$.
  - für stetige Zufallsvariablen X:
    Es existiert eine Dichte f_X von X mit

    $$f_X(a + x) = f_X(a - x) \quad \text{bzw.} \quad f_X(x) = f_X(2a - x)$$

    für alle $x \in \mathbb{R}$.
- Existiert der Erwartungswert $\mathrm{E}(X)$ von X und ist X symmetrisch um $a \in \mathbb{R}$, dann gilt stets $a = \mathrm{E}(X)$.

Erwartungswert von $G(X)$

- Zur Einführung weiterer Kennzahlen für Verteilung einer Zufallsvariablen X nötig: Erwartungswerte von Transformationen $G(X)$ für verschiedene (nicht nur lineare) $\mathcal{B}-\mathcal{B}-$messbare Abbildungen $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Definition 9.8

Es seien X eine Zufallsvariable und $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine $\mathcal{B}-\mathcal{B}-$messbare Abbildung.

- *Ist X diskrete Zufallsvariable, x_i die Trägerpunkte sowie p_X die Wahrscheinlichkeitsfunktion von X und gilt $\sum_{x_i} |G(x_i)| \cdot p_X(x_i) < \infty$, dann existiert der Erwartungswert $\mathrm{E}(G(X))$ und es gilt*

$$\mathrm{E}(G(X)) = \sum_{x_i} G(x_i) \cdot p_X(x_i).$$

- *Ist X stetige Zufallsvariable mit Dichtefunktion f_X und gilt $\int_{-\infty}^{+\infty} |G(x)| \cdot f_X(x)dx < \infty$, dann existiert der Erwartungswert $\mathrm{E}(G(X))$ und es gilt*

$$\mathrm{E}(G(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x) \cdot f_X(x)dx.$$

Höhere Momente von Zufallsvariablen

Definition 9.9 (k-te Momente, Varianz, Standardabweichung)

Es seien X eine (eindimensionale) Zufallsvariable, $k \in \mathbb{N}$.

- *Man bezeichnet den Erwartungswert $\mathrm{E}(X^k)$ (falls er existiert) als das* **Moment k-ter Ordnung (um Null)** *von X.*
- *Existiert $\mathrm{E}(X)$, so bezeichnet man den Erwartungswert $\mathrm{E}[(X - \mathrm{E}(X))^k]$ (falls er existiert) als das* **zentrale Moment k-ter Ordnung** *von X.*
- *Das zweite zentrale Moment heißt auch* **Varianz** *von X, und man schreibt $\sigma_X^2 := \mathrm{Var}(X) := \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}(X))^2] = \mathrm{E}[(X - \mu_X)^2]$.*
- *Die positive Wurzel der Varianz von X heißt auch* **Standardabweichung** *von X, und man schreibt $\sigma_X := \mathrm{Sd}(X) := +\sqrt{\sigma_X^2}$.*

Rechenregeln für Erwartungswerte und Varianz I

Satz 9.2

Es seien X eine (eindimensionale) Zufallsvariable, $a, b \in \mathbb{R}$.

- *Existiert* $\mathrm{E}(X)$, *so existiert auch der Erwartungswert von* $aX + b$ *und es gilt:*

$$\mathrm{E}(aX + b) = a\,\mathrm{E}(X) + b$$

- *Existiert* $\mathrm{Var}(X)$, *so existiert auch die Varianz von* $aX + b$ *und es gilt:*

$$\mathrm{Var}(aX + b) = a^2\,\mathrm{Var}(X)$$

  Für die Standardabweichung gilt dann $\mathrm{Sd}(aX + b) = |a|\,\mathrm{Sd}(X)$.

Rechenregeln für Erwartungswerte und Varianz II

Satz 9.3 (Varianzzerlegungssatz)

Es sei X eine (eindimensionale) Zufallsvariable. Dann existiert die Varianz $\mathrm{Var}(X)$ *genau dann, wenn* $\mathrm{E}(X^2)$ *(und* $\mathrm{E}(X)$*) existiert, und in diesem Fall gilt:*

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - [\mathrm{E}(X)]^2$$

- Die Eigenschaft aus Satz 9.2, den „Erwartungswertoperator“ $\mathrm{E}(\,\cdot\,)$ mit linearen Abbildungen vertauschen zu dürfen, lässt sich zum Beispiel wie folgt verallgemeinern:
  Es seien X eine (eindimensionale) Zufallsvariable, $a, b \in \mathbb{R}$ sowie $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei $\mathcal{B} - \mathcal{B}-$messbare Abbildungen.
  Existieren $\mathrm{E}(G(X))$ *und* $\mathrm{E}(H(X))$, *dann gilt:*

$$\mathrm{E}(aG(X) + bH(X)) = a\,\mathrm{E}(G(X)) + b\,\mathrm{E}(H(X))$$

Rechenregeln für Erwartungswerte und Varianz III

- Mit Satz 9.2 folgt direkt:
  Ist X eine Zufallsvariable mit existierendem Erwartungswert $\mathrm{E}(X)$ *und existierender Varianz* $\mathrm{Var}(X)$*, so erhält man mit*

$$Y := \frac{X - \mathrm{E}(X)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}} = \frac{X - \mathrm{E}(X)}{\mathrm{Sd}(X)} = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X}$$

  eine neue Zufallsvariable mit $\mathrm{E}(Y) = 0$ *und* $\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Sd}(Y) = 1$*.*
  Man nennt Y dann eine **standardisierte Zufallsvariable**.

Schiefe und Wölbung von Zufallsvariablen I

Definition 9.10 (Schiefe (Skewness), Wölbung (Kurtosis))

Sei X eine (eindimensionale) Zufallsvariable mit existierender Varianz $\sigma_X^2 > 0$.

1. *Existiert das zentrale Moment 3. Ordnung, so nennt man*

$$\gamma_X := \gamma(X) := \frac{\mathrm{E}[(X - \mathrm{E}(X))^3]}{\sigma_X^3} = \mathrm{E}\left[\left(\frac{X - \mu_X}{\sigma_X}\right)^3\right]$$

   die **Schiefe (Skewness)** *von X.*
2. *Existiert das zentrale Moment 4. Ordnung, so nennt man*

$$\kappa_X := \kappa(X) := \frac{\mathrm{E}[(X - \mathrm{E}(X))^4]}{\sigma_X^4} = \mathrm{E}\left[\left(\frac{X - \mu_X}{\sigma_X}\right)^4\right]$$

   die **Wölbung (Kurtosis)** *von X.*
   Die um 3 verminderte Kurtosis $\kappa_X - 3$ wird auch **Exzess-Kurtosis** *genannt.*

Schiefe und Wölbung von Zufallsvariablen II

- Ist X symmetrisch, so ist die Schiefe von X (falls sie existiert) gleich Null. Die Umkehrung der Aussage gilt **nicht**.
- Existieren Schiefe bzw. Kurtosis einer Zufallsvariablen X, so existieren auch die Schiefe bzw. Kurtosis von $Y := aX + b$ für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ und es gilt:
  - $\gamma_X = \gamma_Y$ sowie $\kappa_X = \kappa_Y$, falls $a > 0$,
  - $\gamma_X = -\gamma_Y$ sowie $\kappa_X = \kappa_Y$, falls $a < 0$.
- In Abhängigkeit von γ_X heißt die Verteilung von X
  - **linkssteil** oder **rechtsschief**, falls $\gamma_X > 0$ gilt und
  - **rechtssteil** oder **linksschief**, falls $\gamma_X < 0$ gilt.

Schiefe und Wölbung von Zufallsvariablen III

- In Abhängigkeit von κ_X heißt die Verteilung von X
  - **platykurtisch** oder **flachgipflig**, falls $\kappa_X < 3$ gilt,
  - **mesokurtisch** oder **normalgipflig**, falls $\kappa_X = 3$ gilt und
  - **leptokurtisch** oder **steilgipflig**, falls $\kappa_X > 3$ gilt.
- γ_X und κ_X können (auch wenn sie existieren) nicht beliebige Werte annehmen. Es gilt stets $\kappa_X \geq 1$ und $\gamma_X^2 \leq \kappa_X - 1$.
- Man kann (zur einfacheren Berechnung von γ_X und κ_X) leicht zeigen:
  - $$\begin{aligned} \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}(X))^3] &= \mathrm{E}(X^3) - 3\,\mathrm{E}(X^2)\,\mathrm{E}(X) + 2[\mathrm{E}(X)]^3 \\ &= \mathrm{E}(X^3) - 3\mu_X\sigma_X^2 - \mu_X^3 \end{aligned}$$
  - $$\begin{aligned} \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}(X))^4] &= \mathrm{E}(X^4) - 4\,\mathrm{E}(X^3)\,\mathrm{E}(X) + 6\,\mathrm{E}(X^2)[\mathrm{E}(X)]^2 - 3[\mathrm{E}(X)]^4 \\ &= \mathrm{E}(X^4) - 4\,\mathrm{E}(X^3)\mu_X + 6\mu_X^2\sigma_X^2 + 3\mu_X^4 \end{aligned}$$

Beispiel

zu stetiger Zufallsvariable X aus Folie 208 mit Dichte $f_X(x) = \begin{cases} 6(x - x^2) & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.

- $\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x)dx = \int_0^1 (6x^2 - 6x^3)dx = \left[2x^3 - \frac{3}{2}x^4\right]_0^1 = \frac{1}{2}$
- $\mathrm{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f_X(x)dx = \int_0^1 (6x^3 - 6x^4)dx = \left[\frac{3}{2}x^4 - \frac{6}{5}x^5\right]_0^1 = \frac{3}{10}$
  $\Rightarrow \mathrm{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{3}{10} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{20}$
- $\mathrm{E}(X^3) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 \cdot f_X(x)dx = \int_0^1 (6x^4 - 6x^5)dx = \left[\frac{6}{5}x^5 - x^6\right]_0^1 = \frac{1}{5}$
  $\Rightarrow \gamma(X) = \dfrac{\frac{1}{5} - 3 \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3}{(1/20)^{3/2}} = \dfrac{\frac{4-9+5}{20}}{(1/20)^{3/2}} = 0$
- $\mathrm{E}(X^4) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 \cdot f_X(x)dx = \int_0^1 (6x^5 - 6x^6)dx = \left[x^6 - \frac{6}{7}x^7\right]_0^1 = \frac{1}{7}$
  $\Rightarrow \kappa(X) = \dfrac{\frac{1}{7} - 4 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} + 6 \cdot \frac{3}{10} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4}{(1/20)^2} = \dfrac{3/560}{1/400} = \dfrac{15}{7}$