Inhaltsverzeichnis

(Ausschnitt)

Laplacesche Wahrscheinlichkeitsräume I

- Einfachster Fall für $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ (wie in Würfel-Beispiel):
  - Ω endlich,
  - Eintritt aller Ergebnisse $\omega \in \Omega$ gleichwahrscheinlich.
- Wahrscheinlichkeitsräume mit dieser Eigenschaft heißen **Laplacesche Wahrscheinlichkeitsräume**.
- Als σ-Algebra $\mathcal{F}$ kann stets $\mathcal{P}(\Omega)$ angenommen werden.
  Insbesondere ist also jede beliebige Teilmenge von Ω ein Ereignis, dessen Eintrittswahrscheinlichkeit berechnet werden kann.

Laplacesche Wahrscheinlichkeitsräume II

- Das **Laplacesche Wahrscheinlichkeitsmaß** P ergibt sich dann als:

$$P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}; P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

- Wahrscheinlichkeit $P(A)$ eines Ereignisses A ist also der Quotient

$$\frac{\text{Anzahl der im Ereignis } A \text{ enthaltenen Ergebnisse}}{\text{Anzahl aller möglichen Ergebnisse}}$$

bzw.

$$\frac{\text{Anzahl der (für Ereignis } A\text{) günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der (insgesamt) möglichen Fälle}} .$$

- Einzige Schwierigkeit: **Zählen!**

Kombinatorik

- Disziplin, die sich mit „Zählen“ beschäftigt: **Kombinatorik**
- Verwendung allgemeiner Prinzipien und Modelle als Hilfestellung zum Zählen in konkreten Anwendungen.

Satz 6.1 (Additionsprinzip, Multiplikationsprinzip)

Sei $r \in \mathbb{N}$, seien $M_1, M_2, \dots, M_r$ (jeweils) endliche Mengen.

- *Ist $M_i \cap M_j = \emptyset$ für alle $i \neq j$, dann gilt das* **Additionsprinzip**

$$|M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_r| = |M_1| + |M_2| + \cdots + |M_r| .$$

- *Mit $M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_r := \{(m_1, \dots, m_r) \,|\, m_1 \in M_1, \dots, m_r \in M_r\}$ gilt das* **Multiplikationsprinzip**

$$|M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_r| = |M_1| \cdot |M_2| \cdot \ldots \cdot |M_r|$$

und im Fall $M = M_1 = M_2 = \cdots = M_r$ mit $M^r := \underbrace{M \times M \times \cdots \times M}_{r-\text{mal}}$ spezieller

$|M^r| = |M|^r$.

Definition 6.1 (Fakultät, Binomialkoeffizient)

1. *Mit* $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ *sei die Menge der natürlichen Zahlen einschließlich Null bezeichnet.*
2. *Für jedes* $n \in \mathbb{N}_0$ *definiert man die Zahl* $n! \in \mathbb{N}$ *(gelesen „n-***Fakultät***") rekursiv durch*
   - $0! := 1$ *und*
   - $(n+1)! := (n+1) \cdot n!$ *für alle* $n \in \mathbb{N}_0$*.*
3. *Für* $n, r \in \mathbb{N}_0$ *mit* $0 \leq r \leq n$ *definiert man die Zahl* $(n)_r$ *(gelesen „n tief r") durch*
$$(n)_r := \frac{n!}{(n-r)!} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-r+1) \ .$$
4. *Für* $n, r \in \mathbb{N}_0$ *und* $0 \leq r \leq n$ *definiert man den* **Binomialkoeffizienten** $\binom{n}{r}$ *(gelesen „n über r") durch*
$$\binom{n}{r} := \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!} \ .$$

Modelle zum Zählen I

- Gebräuchliches (Hilfs-)Modell zum Zählen: **Urnenmodell**:
  Wie viele Möglichkeiten gibt es, r mal aus einer Urne mit n unterscheidbaren (z.B. von 1 bis n nummerierten) Kugeln zu ziehen?
- Varianten:
  - Ist die Reihenfolge der Ziehungen relevant?
  - Wird die Kugel nach jeder Ziehung wieder in die Urne zurückgelegt?

Modelle zum Zählen II

- *Alternatives Modell:*
  Wie viele Möglichkeiten gibt es, r Murmeln in n unterscheidbare (z. B. von 1 bis n nummerierte) Schubladen zu verteilen.

  Achtung: Auch als weiteres Urnenmodell (Verteilen von r Kugeln auf n Urnen) geläufig!
- Varianten:
  - Sind (auch) die Murmeln unterscheidbar?
  - Dürfen mehrere Murmeln pro Schublade (Mehrfachbelegungen) vorhanden sein?
- Beide Modelle entsprechen sich (einschließlich ihrer Varianten)!
- Im Folgenden (zur Vereinfachung der Darstellung):
  Identifizieren von endlichen Mengen der Mächtigkeit n mit der Menge $\mathbb{N}_n := \{1, 2, \ldots, n\}$ der ersten n natürlichen Zahlen.

Variante I

„geordnete Probe (Variation) mit Wiederholung“

- Ziehen **mit Zurücklegen** und **mit** Berücksichtigung der **Reihenfolge**.

  Für jede der r Ziehungen n Möglichkeiten, Multiplikationsprinzip anwenden.
- Anzahl der Möglichkeiten:

$$
{}^{w}_{n}V_{r} := \underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{r \text{ Faktoren}} = n^r
$$

- Formale Darstellung aller Möglichkeiten:

$$
\{(m_1, \ldots, m_r) \mid m_1, \ldots, m_r \in \mathbb{N}_n\} = \mathbb{N}_n^r
$$

- gleichbedeutend: Verteilen von **unterscheidbaren** Murmeln **mit** Zulassung von **Mehrfachbelegungen**

Variante II

„geordnete Probe (Variation) ohne Wiederholung“

- Ziehen **ohne Zurücklegen** und **mit** Berücksichtigung der **Reihenfolge**.
  Für erste Ziehung n Möglichkeiten, für zweite $n-1$, ..., für r-te Ziehung $n-r+1$ Möglichkeiten, Multiplikationsprinzip anwenden.
- Anzahl der Möglichkeiten:

$$ {}_nV_r := n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!} = (n)_r $$

- Formale Darstellung aller Möglichkeiten:

$$ \{(m_1, \ldots, m_r) \in \mathbb{N}_n^r \mid m_i \neq m_j \text{ für } i \neq j, 1 \leq i,j \leq r\} $$

- gleichbedeutend: Verteilen von **unterscheidbaren** Murmeln **ohne** Zulassung von **Mehrfachbelegungen**
- **Spezialfall:** $n = r$
  - $\rightsquigarrow$ $n!$ verschiedene Möglichkeiten
  - entspricht (Anzahl der) möglichen Anordnungen (**Permutationen**) von n unterscheidbaren Kugeln bzw. n unterscheidbaren Murmeln

Variante III

„ungeordnete Probe (Kombination) ohne Wiederholung“

- Ziehen **ohne Zurücklegen** und **ohne** Berücksichtigung der **Reihenfolge**.
  Wie in Variante 2: Für erste Ziehung n Möglichkeiten, für zweite $n-1$, ..., für r-te Ziehung $n-r+1$ Möglichkeiten, Multiplikationsprinzip anwenden; **aber:** *je $r!$ Möglichkeiten unterscheiden sich nur durch die (nicht zu berücksichtigende!) Reihenfolge.*
- Anzahl der Möglichkeiten:

$$ {}_nC_r := \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-r+1)}{r \cdot (r-1) \cdot \ldots \cdot 1} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r} $$

- Formale Darstellung aller Möglichkeiten:

$$ \{(m_1, \ldots, m_r) \in \mathbb{N}_n^r \mid m_1 < m_2 < \cdots < m_r\} $$

- gleichbedeutend: Verteilen von **nicht unterscheidbaren** Murmeln **ohne** Zulassung von **Mehrfachbelegungen**
- Häufig Anwendung bei *gleichzeitigem* Ziehen von r aus n Objekten bzw. simultane Auswahl von r aus n Plätzen; Anzahl der Möglichkeiten entspricht Anzahl r-elementiger Teilmengen aus n-elementiger Menge.

Variante IV

„ungeordnete Probe (Kombination) mit Wiederholung“

- Ziehen **mit Zurücklegen** und **ohne** Berücksichtigung der **Reihenfolge**.

  Verständnis schwieriger!
  Vorstellung: Erstelle „Strichliste“ mit r Strichen, verteilt auf n Felder (eines für jede Kugel) $\rightsquigarrow$ r Striche zwischen $n-1$ „Feldbegrenzungen“. Anzahl Möglichkeiten entspricht Anzahl der Möglichkeiten, die r Striche in der „Reihung“ der $n-1+r$ Striche&Feldbegrenzungen zu positionieren.
- Anzahl der Möglichkeiten:

$${}^{w}_{n}C_r := \binom{n+r-1}{r} = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!} = \frac{(n+r-1)\cdot(n+r-2)\cdot\ldots\cdot n}{r\cdot(r-1)\cdot\ldots\cdot 1}$$

- Formale Darstellung aller Möglichkeiten:

$$\{(m_1,\ldots,m_r)\in\mathbb{N}_n^r \mid m_1\le m_2\le\cdots\le m_r\}$$

- gleichbedeutend: Verteilen von **nicht unterscheidbaren** Murmeln **mit** Zulassung von **Mehrfachbelegungen**
- **Achtung:** Üblicherweise **nicht** geeignet als Ω in Laplaceschen Wahrscheinlichkeitsräumen, da die verschiedenen Möglichkeiten bei üblichen Ziehungsvorgängen nicht alle gleichwahrscheinlich sind!

Übersicht der Varianten I–IV

vgl. Ulrich Krengel, Einführung in die W.-Theorie und Statistik, 7. Aufl., Vieweg, Wiesbaden, 2003

r unterscheidbare Kugeln aus Urne mit n (unterscheidbaren) Kugeln	**mit** Zurücklegen	**ohne** Zurücklegen	
mit Berücksichtigung der Reihenfolge	Variante I ${}^{w}_{n}V_r = n^r$	Variante II ${}_{n}V_r = (n)_r$	**unterscheidbare** Murmeln
ohne Berücksichtigung der Reihenfolge	Variante IV ${}^{w}_{n}C_r = \binom{n+r-1}{r}$	Variante III ${}_{n}C_r = \binom{n}{r}$	**nicht unterscheidbare** Murmeln
	mit Mehrfachbesetzung	**ohne** Mehrfachbesetzung	r Murmeln in n unterscheidbare Schubladen

Bemerkungen

- Wird ohne Zurücklegen gezogen, muss natürlich $r \leq n$ gefordert werden!
  (Es können insgesamt nicht mehr Kugeln entnommen werden, als zu Beginn in der Urne enthalten waren.)
- Werden **alle** Kugeln ohne Zurücklegen unter Berücksichtigung der Reihenfolge entnommen, wird häufig folgende Verallgemeinerung betrachtet:
  - Nicht alle n Kugeln sind unterscheidbar (durchnummeriert).
  - Es gibt $m < n$ (unterscheidbare) Gruppen von Kugeln, die jeweils $n_1, n_2, \ldots, n_m$ **nicht** unterscheidbare Kugeln umfassen (mit $n = \sum_{i=1}^{m} n_i$).
  - Da es jeweils $n_1!, n_2!, \ldots, n_m!$ nicht unterscheidbare Anordnungen der Kugeln innerhalb der Gruppen gibt, reduziert sich die Anzahl der insgesamt vorhandenen Möglichkeiten von ${}_nP := {}_nV_n = n!$ auf

$$ {}_nP_{n_1,n_2,\ldots,n_m} := \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_m!} . $$

  - Typische Anwendung: Buchstabenanordnungen bei „Scrabble“
  - Nenner von ${}_nP_{n_1,n_2,\ldots,n_m}$ liefert Anzahl der Möglichkeiten für jeweils nicht unterscheidbare Anordnungen.

- Anwendung der Kombinatorik in Laplaceschen Wahrscheinlichkeitsräumen:
  - Auswahl eines geeigneten Ergebnisraums Ω mit **gleichwahrscheinlichen** Ausgängen des Zufallsexperiments.
  - Bestimmen von $|\Omega|$ mit kombinatorischen Hilfsmitteln.
  - Bestimmen von $|A|$ für interessierende Ereignisse $A \subseteq \Omega$ mit kombinatorischen Hilfsmitteln.
- Häufig gibt es nicht **die** richtige Lösung, sondern mehrere, da oft mehrere Modelle (mehr oder weniger) geeignet sind.
- Wird aber beispielsweise Ω unter Berücksichtigung der Ziehungsreihenfolge konstruiert, obwohl die Reihenfolge für das interessierende Ereignis A unwichtig ist, müssen unterschiedliche mögliche Anordnungen bei der Konstruktion von A ebenfalls berücksichtigt werden!
- Trotz vorhandener (und nützlicher) Modelle:

  Richtiges Zählen hat häufig „Knobelcharacter“, stures Einsetzen in Formeln selten ausreichend, Mitdenken erforderlich!

Beispiele

- **Lottospiel „6 aus 49“** (ohne Berücksichtigung einer Zusatzzahl)
  - Interessierendes Ereignis A: (Genau) 3 „Richtige“
  - $|\Omega| = \binom{49}{6} = 13983816$, $|A| = \binom{6}{3} \cdot \binom{43}{3} = 246820$

  $\Rightarrow P(A) = \frac{\binom{6}{3} \cdot \binom{43}{3}}{\binom{49}{6}} = 0.01765 = 1.765\%$
- Anzahl der Möglichkeiten bei **zweimaligem Würfelwurf**
  - wenn die Reihenfolge irrelevant (z.B. bei gleichzeitigem Werfen) ist:

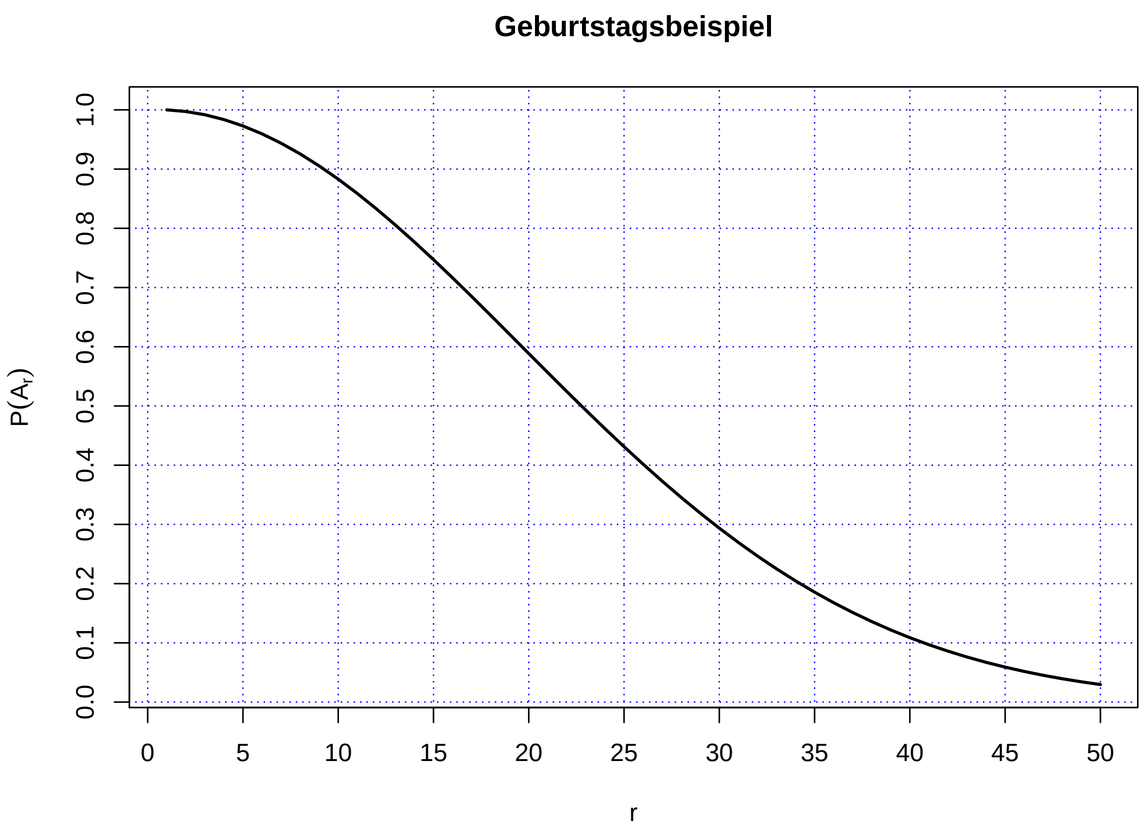
    $|\Omega| = \binom{6+2-1}{2} = 21$

    Vorsicht: nicht alle Ergebnisse gleichwahrscheinlich!
  - wenn die Reihenfolge relevant ist:

    $|\Omega| = 6^2 = 36$
- **Geburtstage**

  Zusammensetzung der Geburtstage (ohne Jahreszahl; Vernachlässigung von Schaltjahren) bei r Personen (mit Reihenfolgeberücksichtigung)
  - Interessierendes Ereignis A_r: alle r Personen haben verschiedene Geburtstage
  - $|\Omega_r| = 365^r$, $|A_r| = (365)_r$ für $r \leq 365$, $|A_r| = 0$ sonst.

  $\Rightarrow P(A_r) = \frac{(365)_r}{365^r}$ für $r \leq 365$, $P(A_r) = 0$ sonst.



Allgemeine diskrete Wahrscheinlichkeitsräume I

- Verallgemeinerung von Laplaceschen Wahrscheinlichkeitsräumen: **Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume**
- Ω endlich (mit $|\Omega| = n$) oder abzählbar unendlich.
- Nach wie vor: Jeder Teilmenge von Ω soll eine Wahrscheinlichkeit zugeordnet werden können, also $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.
- Damit: Jedem Ergebnis kann Wahrscheinlichkeit zugeordnet werden.
- **Aber:**
  Ergebnisse (auch für endliches Ω) nicht mehr (zwingend) gleichwahrscheinlich.

Allgemeine diskrete Wahrscheinlichkeitsräume II

Definition 6.2 (Diskreter Wahrscheinlichkeitsraum)

Sei $\Omega \neq \emptyset$ endlich oder abzählbar unendlich und $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Sei $p : \Omega \to [0, 1]$ eine Abbildung mit $p(\omega) \geq 0$ für alle $\omega \in \Omega$ und $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$. Dann heißen das durch

$$P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}; P(A) := \sum_{\omega \in A} p(\omega)$$

definierte Wahrscheinlichkeitsmaß sowie der Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ **diskret**, *p heißt auch* **Wahrscheinlichkeitsfunktion**.

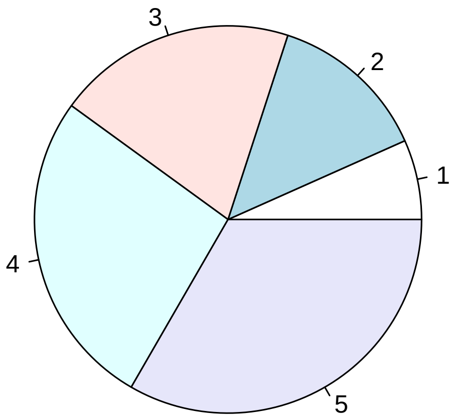
- Ein Laplacescher Wahrscheinlichkeitsraum ist also ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum mit $p : \Omega \to [0, 1]; p(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}$.

Beispiel I

- **„Glücksrad"** mit folgendem Aufbau:
  n Segmente, nummeriert von 1 bis n, deren Größe proportional zur Nummer ist (und die das Rad vollständig ausfüllen).
  - $\Omega = \{1, \dots, n\}$
  - Mit $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ erhält man für die Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$p : \Omega \to [0,1]; p(\omega) = \frac{\omega}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2\omega}{n(n+1)}$$

- Beispiel für $n = 5$:



Beispiel II

- **Münze** (mit „Wappen" und „Zahl") solange werfen, bis **zum ersten Mal „Zahl"** zu sehen ist:
  Mögliche Ergebnisse: {Z,WZ,WWZ,WWWZ,...}, *im Folgenden repräsentiert durch Anzahl der Würfe (insgesamt)*.
  - $\Omega = \mathbb{N}$
  - Wahrscheinlichkeitsfunktion (bei „fairer" Münze)

$$p : \Omega \to [0,1]; p(\omega) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\omega} = \frac{1}{2^{\omega}}$$

- Wahrscheinlichkeit, höchstens n Würfe zu benötigen:

$$P(\{1,\dots,n\}) = \sum_{\omega=1}^{n} p(\omega) = \sum_{\omega=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{\omega} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right)}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

Hier verwendet: Geometrische Summenformel $\sum_{i=1}^{n} q^i = \frac{q\cdot(1-q^n)}{1-q}$ *(für* $q \neq 1$*)*