Teil II

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Inhaltsverzeichnis

(Ausschnitt)

5 Zufallsexperimente
- Ergebnisse
- Ereignisse
- Wahrscheinlichkeiten

Zufallsexperimente (Zufallsvorgänge)

- Unter Zufallsexperimenten versteht man Geschehnisse,
  - deren *mögliche* (sich gegenseitig ausschließende!) Ausgänge bekannt sind,
  - deren (konkreter) Ausgang aber ungewiss ist (oder zumindest ungewiss zu sein scheint bzw. in der Anwendungssituation a priori nicht bestimmt werden kann!).
- Beispiele für Zufallsexperimente: Würfelwurf, Münzwurf, Lottoziehung, gefallene Zahl beim Roulette, ausgeteiltes Blatt bei Kartenspielen
- Entscheidend ist weniger, ob der Ausgang eines Vorgangs tatsächlich „zufällig" ist, sondern vielmehr, ob der Ausgang als zufällig angesehen werden soll!
- Zur Modellierung von Zufallsexperimenten mehrere Komponenten erforderlich.

Ergebnisse

Definition 5.1

Zu einem Zufallsexperiment nennt man die nichtleere Menge

$$\Omega = \{\omega \,|\, \omega \textit{ ist ein möglicher Ausgang des Zufallsexperiments}\}$$

der möglichen (sich gegenseitig ausschließenden) Ausgänge **Ergebnisraum**, *ihre Elemente* ω *auch* **Ergebnisse**.

- Nach Definition 5.1 kann also **nach** Durchführung des Zufallsexperiments **genau ein** Ergebnis $\omega \in \Omega$ angegeben werden, das den Ausgang des Zufallsexperiments beschreibt.

Ereignisse I

- Interesse gilt nicht nur einzelnen Ausgängen des Zufallsexperiments, sondern oft auch Zusammenschlüssen von Ausgängen, sog. **Ereignissen**.
  Beispiele
  - beim Roulette: Es ist Rot gefallen
  - beim Würfeln: Es ist eine gerade Zahl gefallen
  - beim Skatspiel: Das eigene Blatt enthält mindestens 2 Buben.
  - beim Lottospiel: Eine vorgegebene Tippreihe enthält (genau) 3 „Richtige“
- Ereignisse sind also Teilmengen des Ergebnisraums; ist Ω der Ergebnisraum eines Zufallsexperiments, gilt für jedes Ereignis A die Beziehung $A \subseteq \Omega$.
- Ereignisse, die nur aus einem Element des Ergebnisraums (also einem einzigen Ergebnis) bestehen, heißen auch **Elementarereignisse**.

Ereignisse II

- Ob ein Ereignis A eingetreten ist oder nicht, hängt vom tatsächlichen Ausgang des Zufallsexperiments ab:
  - Ein Ereignis $A \subseteq \Omega$ ist eingetreten, falls für den Ausgang ω gilt: $\omega \in A$
  - Ein Ereignis $A \subseteq \Omega$ ist nicht eingetreten, falls für den Ausgang ω gilt: $\omega \notin A$

$\rightsquigarrow$ Es gilt insbesondere **nicht** (wie bei Ergebnissen), dass jeweils (nur) genau ein Ereignis eintritt!

- Das Ereignis Ω wird als **sicheres Ereignis** bezeichnet, da es offensichtlich immer eintritt.
- Das Ereignis $\emptyset = \{\}$ (die leere Menge) wird als **unmögliches Ereignis** bezeichnet, da es offensichtlich nie eintritt.
  (Für kein Element $\omega \in \Omega$ kann $\omega \in \emptyset$ gelten.)

Ereignisse III

- Ereignisse können verknüpft werden. Dabei lassen sich aussagenlogische Verknüpfungen in mengentheoretische übersetzen, z.B.:
  - Wenn Ereignis A eintritt, dann auch Ereignis B $\Leftrightarrow$ Es gilt $A \subseteq B$.
  - Die Ereignisse A und B treten nie gleichzeitig ein $\Leftrightarrow$ Es gilt $A \cap B = \emptyset$.
  - Ereignis A und Ereignis B treten ein $\Leftrightarrow$ Ereignis $A \cap B$ tritt ein.
  - Ereignis A oder Ereignis B treten ein $\Leftrightarrow$ Ereignis $A \cup B$ tritt ein.

Vorsicht!

„Oder“ (für sich betrachtet) wird stets nicht-exklusiv verwendet, also **nicht** im Sinne von „entweder–oder“. „A oder B tritt ein“ bedeutet also, dass A eintritt oder B eintritt oder beide Ereignisse eintreten.

Ereignisse IV

Definition 5.2

Sei Ω eine Menge, seien A und B Teilmengen von Ω, es gelte also $A \subseteq \Omega$ und $B \subseteq \Omega$. Dann heißen

- $A \cup B := \{\omega \in \Omega \,|\, \omega \in A \vee \omega \in B\}$ *die* **Vereinigung** *von A und B,*
- $A \cap B := \{\omega \in \Omega \,|\, \omega \in A \wedge \omega \in B\}$ *der* **Durchschnitt** *von A und B,*
- $A \backslash B := \{\omega \in \Omega \,|\, \omega \in A \wedge \omega \notin B\}$ *die* **Differenz** *von A und B,*
- $\overline{A} := \Omega \backslash A = \{\omega \in \Omega \,|\, \omega \notin A\}$ *das* **Komplement** *von A,*
- *A und B* **disjunkt**, *falls $A \cap B = \emptyset$,*
- *A und B* **komplementär**, *falls $B = \overline{A}$.*

Ereignisse V

- Das Komplement $\overline{A}$ eines Ereignisses A heißt auch **Gegenereignis** von A. Es tritt offensichtlich genau dann ein, wenn A nicht eintritt.
- Vereinigungen und Durchschnitte werden auch für mehr als 2 (Teil-)Mengen bzw. Ereignisse betrachtet, zum Beispiel
  - die Vereinigung $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ bzw. der Durchschnitt $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ der n Mengen bzw. Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$,
  - die Vereinigung $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ bzw. der Durchschnitt $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ der (abzählbar) unendlichen vielen Mengen bzw. Ereignisse $A_1, A_2, \ldots$.

Rechenregeln für Mengenoperationen I

Für Teilmengen bzw. Ereignisse A, B, C von Ω gelten die „Rechenregeln“:

- Idempotenzgesetze, neutrale und absorbierende Elemente

$$\begin{array}{cccc} A \cup \emptyset = A & A \cap \emptyset = \emptyset & A \cup \Omega = \Omega & A \cap B \subseteq A \\ A \cup A = A & A \cap A = A & A \cap \Omega = A & A \cap B \subseteq B \end{array}$$

- Kommutativgesetze

$$A \cup B = B \cup A \qquad A \cap B = B \cap A$$

- Assoziativgesetze

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \qquad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

Rechenregeln für Mengenoperationen II

- Distributivgesetze

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \qquad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

- De Morgansche Gesetze

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

- Disjunkte Zerlegung von A durch B

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \qquad \text{mit} \qquad (A \cap B) \cap (A \cap \overline{B}) = \emptyset$$

Wahrscheinlichkeiten I

- Zur Modellierung von Zufallsexperimenten: „Quantifizierung“ des Zufalls durch *Angabe von* **Wahrscheinlichkeiten** *für Ereignisse.*
- Spezieller:
  Gesucht ist eine Abbildung, die *einer bestimmten Menge von* Ereignissen (Eintritts-)Wahrscheinlichkeiten zuordnet.
- Aber:
  - Was sind Wahrscheinlichkeiten?
  - Woher kommen diese Wahrscheinlichkeiten?
  - Was sagen diese Wahrscheinlichkeiten aus?

Wahrscheinlichkeiten II

- Es gibt verschiedene geläufige Wahrscheinlichkeitsbegriffe, insbesondere:
  - Klassischer oder Laplacescher Wahrscheinlichkeitsbegriff:
    Ω ist so konstruiert, dass alle Elementarereignisse die gleiche Eintrittswahrscheinlichkeit haben.
  - Häufigkeitsbasierter Wahrscheinlichkeitsbegriff:
    Zufallsexperiment wird als unendlich oft wiederholbar vorausgesetzt, Eintrittswahrscheinlichkeiten der Ereignisse als „Grenzwert" der relativen Eintrittshäufigkeiten in (unendlicher) Folge von Durchführungen.
  - Subjektiver Wahrscheinlichkeitsbegriff:
    Persönliche Einschätzungen geben Eintrittswahrscheinlichkeiten an. Festlegung zum Beispiel durch *subjektive* Angabe von „Grenz"-Wettquoten auf das Eintreten von Ereignissen.
- Unabhängig vom konkreten Wahrscheinlichkeitsbegriff:
  Bestimmte „Konsistenzbedingungen" für
  - Wahrscheinlichkeiten und
  - Menge der Ereignisse, denen Wahrscheinlichkeiten zugeordnet werden können

  sinnvoll.

Wahrscheinlichkeiten III

- Folgender „Minimalsatz“ von Bedingungen geläufig:
  - Ω muss eine Wahrscheinlichkeit zugeordnet werden können; genauer muss diese Wahrscheinlichkeit 1 betragen.
  - Wenn einem Ereignis A eine (Eintritts-)Wahrscheinlichkeit zugeordnet werden kann, dann muss auch dem Gegenereignis $\overline{A}$ (also dem Nichteintreten des Ereignisses A) eine Wahrscheinlichkeit zugeordnet werden können; genauer muss die Summe dieser beiden Wahrscheinlichkeiten 1 betragen.
  - Wenn einer Menge von Ereignissen $A_1, A_2, \ldots$ Wahrscheinlichkeiten zugeordnet werden können, dann muss auch eine Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens eines dieser Ereignisse eintritt, angegeben werden können; sind die Ereignisse $A_1, A_2, \ldots$ (paarweise) disjunkt, dann muss diese Wahrscheinlichkeit mit der Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten übereinstimmen.
  - Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen dürfen nicht negativ sein.
- Mengensysteme, die diesen Bedingungen genügen, heißen σ-Algebren.

σ-Algebra I

Definition 5.3 (σ-Algebra)

*Sei $\Omega \neq \emptyset$ eine Menge. Eine Menge $\mathcal{F}$ von Teilmengen von Ω heißt σ-**Algebra** über Ω, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

1. $\Omega \in \mathcal{F}$,
2. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{F}$,
3. $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{F}$.

- Ist Ω endlich (oder abzählbar unendlich), wird für $\mathcal{F}$ häufig die Menge *aller* Teilmengen von Ω, die sog. **Potenzmenge** $\mathcal{P}(\Omega)$, gewählt.
- Gilt $\#\Omega = n$, so ist $\#\mathcal{P}(\Omega) = 2^n$.

σ-Algebra II

- Aus Definition 5.3 folgen zahlreiche weitere Eigenschaften, z.B.:
  - $\emptyset \in \mathcal{F}$,
  - $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{F}$,
  - $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$ und $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$,
  - $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \backslash B \in \mathcal{F}$.
- Das Paar $(\Omega, \mathcal{F})$ wird auch „Messraum“ genannt.

Wahrscheinlichkeitsmaß

- Abbildungen, die den Elementen von $\mathcal{F}$ (!) Wahrscheinlichkeiten zuordnen, heißen Wahrscheinlichkeitsmaße.

Definition 5.4 (Wahrscheinlichkeitsmaß)

Es seien $\Omega \neq \emptyset$ eine Menge, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ eine σ-Algebra über Ω und $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. P heißt **Wahrscheinlichkeitsmaß** *auf $\mathcal{F}$, falls gilt:*

1. $P(A) \geq 0$ *für alle* $A \in \mathcal{F}$,
2. $P(\Omega) = 1$,
3. $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ *für alle* $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ *mit* $A_j \cap A_k = \emptyset$ *für* $j \neq k$.

- Die Eigenschaften 1–3 in Definition 5.4 heißen auch *Axiome von Kolmogorov*.

Wahrscheinlichkeitsraum

- Insgesamt wird ein Zufallsexperiment vollständig durch einen Wahrscheinlichkeitsraum beschrieben (und mit ihm identifiziert):

Definition 5.5 (Wahrscheinlichkeitsraum)

Seien $\Omega \neq \emptyset$ *ein Ergebnisraum,* $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ *eine* σ*-Algebra über* Ω *und* P *ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf* $\mathcal{F}$*. Dann heißt das Tripel* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ **Wahrscheinlichkeitsraum**. $\mathcal{F}$ *wird auch* **Ereignisraum** *genannt.*

Beispiel (Zufallsexperiment)

- (Einmaliges) Werfen eines (fairen!) Würfels als Zufallsexperiment.
  - Geeigneter Ergebnisraum: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
  - Geeigneter Ereignisraum: $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ mit $\#\mathcal{F} = 2^{\#\Omega} = 2^6 = 64$
  - Geeignetes Wahrscheinlichkeitsmaß: $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}; P(A) = \dfrac{\#A}{6}$
- Beispiele für Ereignisse:
  - A: Eine vier ist gefallen; $A = \{4\}$
  - B: Eine gerade Zahl wurde gewürfelt; $B = \{2, 4, 6\}$
  - C: Eine Zahl ≤ 3 wurde gewürfelt; $C = \{1, 2, 3\}$
  - D: Eine Zahl > 2 wurde gewürfelt; $D = \{3, 4, 5, 6\}$
- Es gilt: $P(A) = \frac{1}{6}, \qquad P(B) = P(C) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \qquad P(D) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$
- Es gilt zum Beispiel, dass A und C disjunkt sind, oder dass $\overline{B}$ das Ereignis „ungerade Zahl gewürfelt“ beschreibt.

Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten

Es lassen sich die folgenden Rechenregeln für Wahrscheinlichkeitsräume $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und beliebige Ereignisse $A, B, A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ herleiten:

1. $P(A) \leq 1$,
2. $P(\emptyset) = 0$,
3. $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$,
4. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$,
5. $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1) + P(\overline{A_1} \cap A_2) + P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3) + \cdots + P(\overline{A_1} \cap \cdots \overline{A_{n-1}} \cap A_n)$

   und für $n = 2$ und $n = 3$ weiter aufgeschlüsselt:
   1. $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$
   2. $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) =$
      $P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$
6. Bilden die A_i eine **Zerlegung** von Ω, d.h. gilt $A_i \cap A_j = \emptyset$ für alle $i \neq j$ und $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \Omega$, so gilt

   $$P(B) = \sum_{i \in \mathbb{N}} P(B \cap A_i) \; .$$

   Insbesondere gilt stets $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A})$.