Aufgabenstellung und Ergebnisse zur

Bachelor-Prüfung
Schliessende Statistik
Wintersemester 2020/21

PD Dr. Martin Becker

Hinweise für die Klausurteilnehmer

- Die Klausur besteht aus insgesamt 9 Aufgaben. Prüfen Sie die Vollständigkeit Ihres Exemplares nach; spätere Reklamationen können nicht berücksichtigt werden.
- Es sind insgesamt 120 Punkte (= 16 + 12 + 8 + 12 + 19 + 14 + 14 + 6 + 19) erreichbar.
- Als Hilfsmittel sind zugelassen: Taschenrechner (auch mit Grafikfähigkeit), 2 selbsterstellte DIN-A4 Blätter bzw. 4 selbsterstellte (einseitige) DIN-A4 Seiten. Benötigte Tabellen zur Normal- und t-Verteilung finden Sie am Ende dieses Klausurheftes.
- Bei der Korrektur werden **nur** die Lösungen auf den Seiten 1–12 berücksichtigt. Das letzte Blatt (Tabellen zur Normal- und t-Verteilung) darf abgetrennt werden.
- Bei mehreren Lösungsvorschlägen muss die gültige Lösung eindeutig gekennzeichnet sein.
- Mit Ausnahme der Multiple-Choice-Aufgaben muss der Lösungsweg klar ersichtlich sein.
- Alle Punkte innerhalb von Zahlen sind stets Dezimalpunkte (und keine Tausenderpunkte).

Bewertungsteil — Bitte nicht beschreiben							
Aufgabe	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	Σ
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							
9							
Σ							

Aufgabe 1 (16 Punkte)

Markieren Sie jeweils mit einem Kreuz pro Aussage im betreffenden Kästchen, ob die unten stehenden Aussagen wahr oder falsch sind.
Richtige Antworten geben 2 Punkte, falsche Antworten und nicht bearbeitete Aussagen 0 Punkte (Aussagen mit zwei Kreuzen zählen als nicht bearbeitet!).

	wahr	falsch
1. Sei $X_1, \ldots, X_n$ eine einfache Stichprobe vom Umfang n zu Y. Dann sind $X_1, \ldots, X_n$ stets stochastisch unabhängig.	■	□
2. Ist eine Familie von Schätzfunktionen $T_n, n \in \mathbb{N}$, konsistent im quadratischen Mittel für einen Parameter $\theta \in \mathbb{R}$, so ist zumindest eine dieser Schätzfunktionen auch effizient in der Klasse der für θ erwartungstreuen Schätzfunktionen.	□	■
3. Die Breite von Konfidenzintervallen für den Erwartungswert μ einer normalverteilten Zufallsvariablen bei bekannter Varianz verkleinert sich mit wachsendem Stichprobenumfang.	■	□
4. Lehnt man in einem statistischen Test die Nullhypothese H_0 auf Grundlage eines p-Werts der realisierten Teststatistik von $p = 0.0286$ ab, so gilt H_0 nur mit einer Wahrscheinlichkeit von maximal 2.86%.	□	■
5. Bei der Durchführung eines t-Tests für den Erwartungswert einer normalverteilten Zufallsvariablen bei unbekannter Varianz auf Grundlage einer einfachen Stichprobe vom Umfang n zum Signifikanzniveau α lehnt der linksseitige Test H_0 ab, während der zweiseitige Test H_0 nicht verwerfen kann. Damit gilt für die Realisation t der Teststatistik: $t \in [-t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}, -t_{n-1,1-\alpha})$	■	□
6. Mit einem Chi-Quadrat-Anpassungstest soll anhand einer einfachen Stichprobe vom Umfang $n = 100$ überprüft werden, ob die Grundgesamtheit geometrisch verteilt ist. Nach Wahl einer geeigneten Klassierung aus 6 Klassen wird dazu zunächst der unbekannte Parameter der geometrischen Verteilung durch eine ML-Schätzung aus den klassierten Daten ermittelt. Damit ist zur Konstruktion des Ablehnungsbereiches die χ^2-Verteilung mit 4 Freiheitsgraden zu verwenden.	■	□
7. Beim Test zum Vergleich von zwei Anteilswerten (als Spezialfall des 2-Stichproben-t-Tests) ergibt sich unter der speziellen Annahme $p_A = p_B$ die Voraussetzung $\sigma_A^2 = \sigma_B^2$ von selbst.	■	□
8. Die Anwendung der Kleinst-Quadrate-Methode bedeutet, die Summe der quadrierten horizontalen Abstände der Beobachtungspunkte zur Regressionsgeraden zu minimieren.	□	■

<u>Aufgabe 2</u> (12 Punkte)

Markieren Sie jeweils die korrekte Antwort mit einem Kreuz im betreffenden Kästchen. Es ist jeweils genau ein Kreuz korrekt.
Richtige Antworten geben 3 Punkte, falsche Antworten und nicht bearbeitete Aufgabenteile 0 Punkte (Aufgabenteile mit mehr als einem Kreuz zählen als nicht bearbeitet!).

1. Es sei $X_1, \ldots, X_{25}$ eine einfache Stichprobe vom Umfang 25 zu Y mit $Y \sim N(33, 5^2)$. Dann gilt für die Teststatistik $N = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$ des Gauß-Tests für den Mittelwert einer normalverteilten Zufallsvariablen mit bekannter Varianz zur Nullhypothese $H_0 : \mu = 30$:

   (a) $N \sim N\left(-3, 5^2\right)$ ☐

   (b) $N \sim N\left(3, 5^2\right)$ ☐

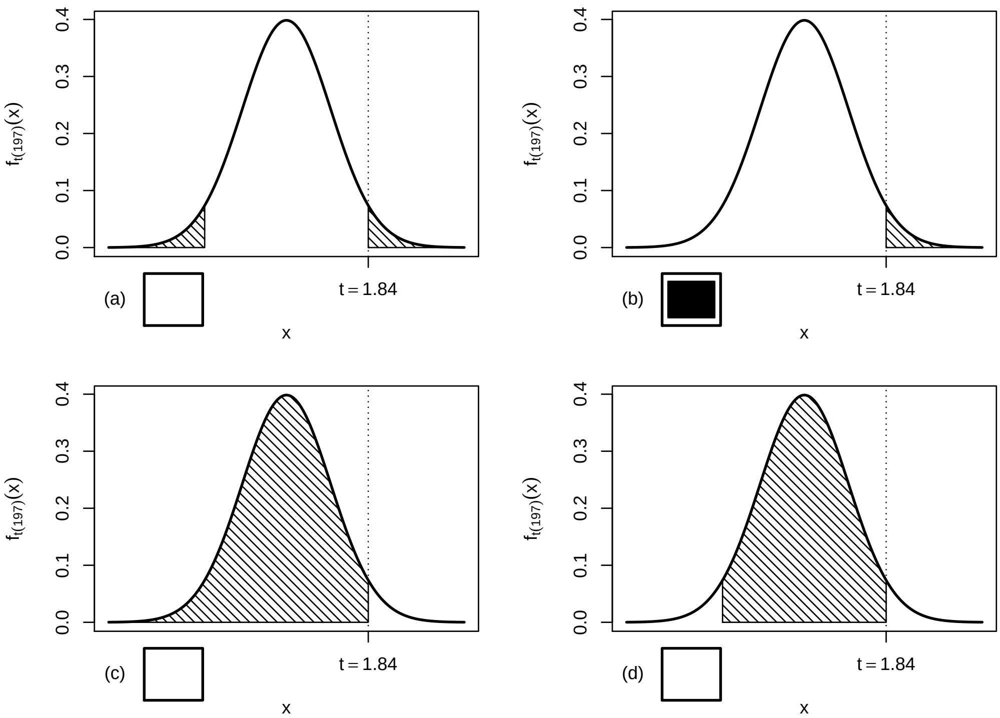
   (c) $N \sim N\left(-3, 1\right)$ ☐

   (d) $N \sim N\left(3, 1\right)$ ■

2. Sei $X_1, \ldots, X_{198}$ eine einfache Stichprobe zu einer $N(\mu, \sigma^2)$-verteilten Zufallsvariablen Y mit unbekannten Parametern μ und σ^2. Auf der Grundlage einer Stichprobenrealisation zu dieser einfachen Stichprobe vom Umfang $n = 198$ soll

   $$H_0 : \mu \leq \mu_0 = 250 \qquad \text{gegen} \qquad H_1 : \mu > \mu_0 = 250$$

   mit einem t-Test getestet werden. Als realisierte Teststatistik erhält man $t = 1.84$. Markieren Sie die Abbildung, welche den p-Wert in der beschriebenen Situation korrekt als Inhalt der schraffierten Fläche unter der Dichtefunktion der Verteilung der Teststatistik unter H_0 (für $\mu = \mu_0$) darstellt.



3. Wird die Teststatistik der einfachen Varianzanalyse als Quotient mit dem Zähler $SB/(k-1)$ und dem Nenner $SW/(n-k)$ notiert und bezeichnet σ^2 die Varianz der Zufallsvariablen $Y_1, \ldots, Y_k$, so

   (a) sind Zähler und Nenner stets sinnvolle Schätzer für σ^2. ☐

   (b) ist der Zähler stets, der Nenner nur unter H_0 ein sinnvoller Schätzer für σ^2. ☐

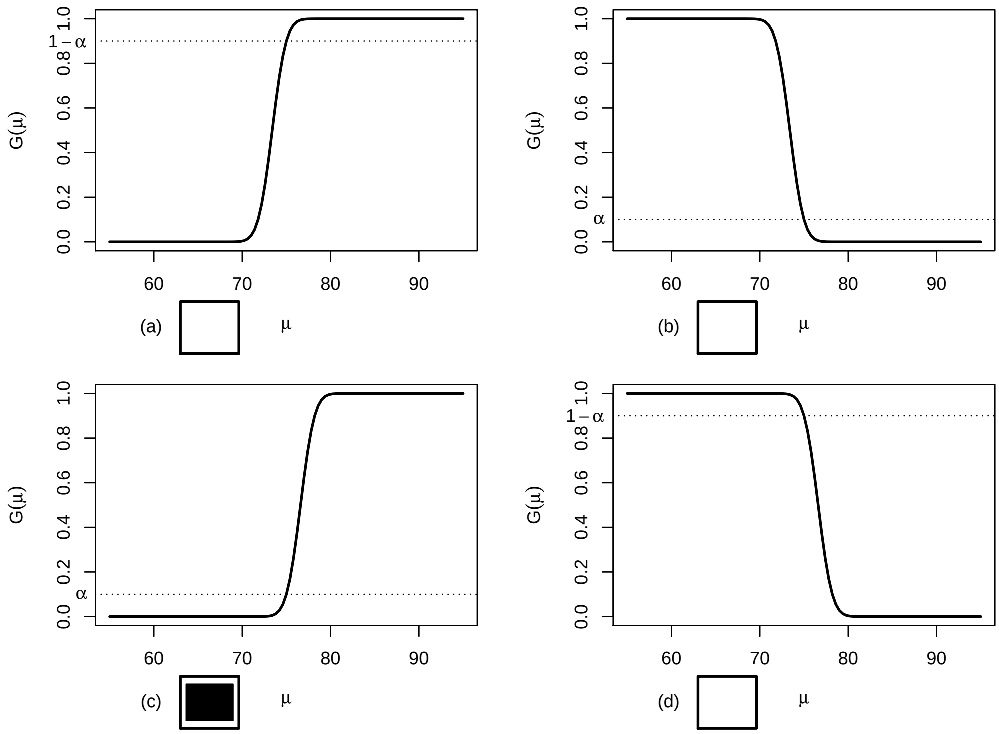
   (c) ist der Zähler nur unter H_0, der Nenner stets ein sinnvoller Schätzer für σ^2. ■

   (d) sind Zähler und Nenner nur unter H_0 sinnvolle Schätzer für σ^2. ☐

4. Auf der Grundlage einer einfachen Stichprobe $X_1, \ldots, X_{64}$ vom Umfang $n = 64$ zu einer $N(\mu, 10^2)$-verteilten Zufallsvariablen wird ein Gauß-Test zur Überprüfung der Hypothesen

$$H_0 : \mu \leq 75 \qquad \text{gegen} \qquad H_1 : \mu > 75$$

   bei einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0.1$ betrachtet.
   Markieren Sie die Abbildung, welche die Gütefunktion des oben genannten Tests korrekt darstellt.



Aufgabe 3 (4 + 2 + 2 = 8 Punkte)

Für $\sigma > 0$ sei die Zufallsvariable Y Rayleigh-verteilt mit Parameter σ. Es gilt dann $\mathrm{E}(Y) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma$ sowie $\mathrm{Var}(Y) = \frac{4-\pi}{2}\sigma^2$. $X_1, \ldots, X_n$ sei für $n \in \mathbb{N}$ eine einfache Stichprobe vom Umfang n zu Y.

(a) Zeigen Sie, dass die Schätzfunktionen

$$T_n(X_1, \ldots, X_n) := \frac{1}{3n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

nicht erwartungstreu für den **quadrierten** Parameter σ^2 sind.

(b) Geben Sie für den **quadrierten** Parameter σ^2 erwartungstreue Schätzfunktionen $\widetilde{T}_n(X_1, \ldots, X_n)$ an.

(c) Welche Eigenschaft müssen die Schätzfunktionen $\widetilde{T}_n$ aus Teil (b) außerdem erfüllen, um für σ^2 konsistent im quadratischen Mittel zu sein?
(Die Gültigkeit dieser Eigenschaft ist **nicht** *zu überprüfen!)*

Ergebnisse (ohne Begründung/Rechenweg):

(a) Beweis durch Berechnung des Erwartungswerts von $T_n(X_1, \ldots, X_n)$.

(b) $\widetilde{T}_n(X_1, \ldots, X_n) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2$.

(c) $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}(\widetilde{T}_n(X_1, \ldots, X_n)) = 0$

Aufgabe 4 (6 + 4 + 2 = 12 Punkte)

Die Verteilung einer Zufallsvariablen Y sei in Abhängigkeit des unbekannten Parameters $a > 1$ durch die folgende Dichtefunktion gegeben:

$$f_Y(y|a) = \begin{cases} \dfrac{2(y-1)}{(a-1)^2} & \text{für } 1 \le y \le a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Der Parameter a soll auf Grundlage einer einfachen Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ vom Umfang n geschätzt werden.

(a) Bestimmen Sie den Schätzer $\widehat{a}_{ML}$ nach der Maximum-Likelihood-Methode.

(b) Zeigen Sie, dass $E(Y) = \frac{2}{3}a + \frac{1}{3}$ gilt.

(c) Bestimmen Sie den Schätzer $\widehat{a}_{MM}$ nach der Methode der Momente.

Hinweise:

- *Beachten Sie, dass Sie Teil (b) auch ohne die Bearbeitung von Teil (a) und Teil (c) ohne die Bearbeitung der Teile (a) und (b) lösen können.*
- *Falls sich der ML-Schätzer als lokale Extremstelle einer differenzierbaren Funktion bestimmen lässt, muss* **nicht** *überprüft werden (z.B. mit Hilfe der 2. Ableitung), ob tatsächlich eine Maximalstelle vorliegt.*
- *Am Ende von Aufgabenteil (b) ist eine Polynomdivision oder eine Erweiterung der rechten Seite eventuell hilfreich.*

Ergebnisse (ohne Begründung/Rechenweg):

(a) $\widehat{a}_{ML} = \max\{x_1, \ldots, x_n\}$

(b) Nachweis durch Berechnung des Erwartungswerts

(c) $\widehat{a}_{MM} = \frac{3}{2}\overline{x} - \frac{1}{2}$

Aufgabe 5 (7 + 2 + 3 + 7 = 19 Punkte)

Bei der Herstellung von Scheibenkäse weiß der Hersteller aus Erfahrung, dass die verwendete Produktionsanlage eine Standardabweichung von $5[g]$ für die abgefüllte Menge hat. Nach einer Inventur hat der Hersteller den Verdacht, dass die Produktionsanlage im Mittel weniger als die auf dem Produkt ausgezeichneten $250[g]$ in die Packungen einfüllt. Dies soll mit einem statistischen Test überprüft werden. Hierzu werden der Produktion 16 Packungen entnommen, deren gemessene Füllmengen $x_1, \ldots, x_{16}$ als Realisation einer einfachen Stichprobe vom Umfang 16 zur annahmegemäß $N(\mu, 5^2[g^2])$-verteilten Abfüllmenge betrachtet werden können. Als Stichprobenmittelwert ergibt sich dabei

$$\overline{x} = \frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16} x_i = 247.474[g]\ .$$

(a) Testen Sie zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$, ob der Verdacht der Herstellerfirma bestätigt werden kann. Fassen Sie das Ergebnis des Tests in einem Antwortsatz zusammen.

(b) Berechnen Sie den p-Wert zum Test aus Teil (a). Wie wäre die Entscheidung zum Test aus Teil (a) bei einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0.01$ ausgefallen?

(c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei der Ziehung einer Stichprobe und der anschließenden Durchführung des Tests aus Teil (a) eine Testentscheidung zu Gunsten der Nullhypothese zu erhalten, falls die tatsächliche mittlere Abfüllmenge $246[g]$ beträgt?

(d) Überprüfen Sie unter Verwendung der Varianzschätzung $s^2 = 35.557$ mit einem geeigneten Test zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$, ob die oben getroffene Annahme $\sigma^2 = 5^2$ aus statistischer Sicht zu verwerfen ist. Fassen Sie das Ergebnis des Tests in einem Antwortsatz zusammen.

Hinweis: Verwenden Sie für Teil (d) den folgenden Tabellenausschnitt mit p-Quantilen von $\chi^2(n)$-Verteilungen

$n\backslash p$	0.01	0.025	0.05	0.50	0.90	0.95	0.975	0.99
11	3.053	3.816	4.575	10.341	17.275	19.675	21.920	24.725
12	3.571	4.404	5.226	11.340	18.549	21.026	23.337	26.217
13	4.107	5.009	5.892	12.340	19.812	22.362	24.736	27.688
14	4.660	5.629	6.571	13.339	21.064	23.685	26.119	29.141
15	5.229	6.262	7.261	14.339	22.307	24.996	27.488	30.578
16	5.812	6.908	7.962	15.338	23.542	26.296	28.845	32.000
17	6.408	7.564	8.672	16.338	24.769	27.587	30.191	33.409
18	7.015	8.231	9.390	17.338	25.989	28.869	31.526	34.805
19	7.633	8.907	10.117	18.338	27.204	30.144	32.852	36.191
20	8.260	9.591	10.851	19.337	28.412	31.410	34.170	37.566

Ergebnisse (ohne Begründung/Rechenweg):

(a) $N = -2.021 \in (-\infty, -1.645) = K \quad \Rightarrow \quad H_0$ wird abgelehnt!

Der Test bestätigt also nicht den Verdacht der Herstellerfirma, dass die von der Maschine abgefüllte Menge im Mittel zu niedrig ist.

(b) p-Wert $p = 0.0217$. Entscheidung wäre zu Gunsten der Nullhypothese ausgefallen.

(c) $\beta(246) = 0.0594$

(d) $\chi^2 = 21.334 \notin [0, 6.262) \cup (27.488, +\infty) = K \quad \Rightarrow \quad H_0$ wird nicht abgelehnt!
Die getroffene Annahme $\sigma^2 = 5^2$ muss also nicht verworfen werden.

Aufgabe 6 (14 Punkte)

Um zu überprüfen, ob es einen Zusammenhang zwischen der Impfbereitschaft (eher keine Impfung / eher Impfung) und der Einstellung zu den aktuellen Anti-Corona-Maßnahmen (nicht ausreichend / angemessen / überzogen) gibt, wurden die Ergebnisse einer aktuellen Umfrage, die man als Realisation einer einfachen Stichprobe auffassen können soll, in der folgenden Tabelle zusammengefasst (sämtliche Daten sind **fiktiv**):

	nicht ausreichend	angemessen	überzogen
eher keine Impfung	80	150	120
eher Impfung	120	450	80

Überprüfen Sie anhand dieses Datenmaterials zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$, ob eine stochastische Abhängigkeit zwischen der Impfbereitschaft und der Einstellung zu den Maßnahmen besteht.

Hinweis: Verwenden Sie den folgenden Tabellenausschnitt mit p-Quantilen von $\chi^2(n)$-Verteilungen:

$n\backslash p$	0.01	0.025	0.05	0.50	0.90	0.95	0.975	0.99
1	0.000	0.001	0.004	0.455	2.706	3.841	5.024	6.635
2	0.020	0.051	0.103	1.386	4.605	5.991	7.378	9.210
3	0.115	0.216	0.352	2.366	6.251	7.815	9.348	11.345
4	0.297	0.484	0.711	3.357	7.779	9.488	11.143	13.277
5	0.554	0.831	1.145	4.351	9.236	11.070	12.833	15.086
6	0.872	1.237	1.635	5.348	10.645	12.592	14.449	16.812
7	1.239	1.690	2.167	6.346	12.017	14.067	16.013	18.475
8	1.646	2.180	2.733	7.344	13.362	15.507	17.535	20.090
9	2.088	2.700	3.325	8.343	14.684	16.919	19.023	21.666
10	2.558	3.247	3.940	9.342	15.987	18.307	20.483	23.209

Ergebnisse (ohne Begründung/Rechenweg):

$\chi^2 = 83.516 \in (5.991, +\infty) = K \quad \Rightarrow \quad H_0$ wird abgelehnt!
Es ist also eine signifikante Abhängigkeit zwischen der Impfbereitschaft und der Einstellung zu den Maßnahmen festzustellen.

Aufgabe 7 (14 Punkte)

Um zu überprüfen, ob die Anzahl der bearbeiteten Zusatzübungsblätter einen Einfluss auf die Leistung in der schriftlichen Prüfung hat, wurden die Prüflinge einer Statistik-Klausur im Sommersemester 2020 in 3 Gruppen eingeteilt (Gruppe 1: kein Zusatzblatt bearbeitet, Gruppe 2: ein Zusatzblatt bearbeitet, Gruppe 3: beide Zusatzblätter bearbeitet). Aus den erreichten Punktzahlen der entsprechenden Klausur wurden auf Basis dieser Einteilung die folgenden Daten aggregiert:

j (Gruppe)	n_j	$\overline{x}_j = \frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{n_j} x_{j,i}$	$\sum_{i=1}^{n_j} x_{j,i}^2$	s_j^2
1	165	69.25	875241	512.03
2	7	88.64	56749	291.61
3	26	89.88	218891	354.09

Überprüfen Sie mit einer einfachen Varianzanalyse (Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$) unter der Annahme, dass die erreichten Punktzahlen Realisierungen von unabhängig $N(\mu_j, \sigma^2)$-verteilten Zufallsvariablen $X_{j,i} (1 \leq j \leq 3, 1 \leq i \leq n_j)$ sind, ob die Anzahl der bearbeiteten Zusatzblätter einen Einfluss auf die (mittlere) erreichte Punktzahl hat. Fassen Sie das Ergebnis der Varianzanalyse auch in einem Antwortsatz zusammen.

Hinweis: Verwenden Sie den folgenden Tabellenausschnitt mit 0.95*-Quantilen von* $F(m, n)$*-Verteilungen:*

$n \backslash m$	1	2	3	4	5	195	196	197	198	199
1	161.448	199.500	215.707	224.583	230.162	253.661	253.664	253.667	253.671	253.674
2	18.513	19.000	19.164	19.247	19.296	19.491	19.491	19.491	19.491	19.491
3	10.128	9.552	9.277	9.117	9.013	8.541	8.541	8.540	8.540	8.540
4	7.709	6.944	6.591	6.388	6.256	5.647	5.647	5.646	5.646	5.646
5	6.608	5.786	5.409	5.192	5.050	4.386	4.386	4.385	4.385	4.385
195	3.890	3.042	2.651	2.418	2.260	1.266	1.266	1.266	1.265	1.265
196	3.889	3.042	2.651	2.418	2.260	1.266	1.266	1.265	1.265	1.265
197	3.889	3.042	2.650	2.417	2.260	1.266	1.265	1.265	1.265	1.264
198	3.889	3.042	2.650	2.417	2.260	1.265	1.265	1.264	1.264	1.264
199	3.889	3.041	2.650	2.417	2.259	1.265	1.264	1.264	1.264	1.263

Ergebnisse (ohne Begründung/Rechenweg):

$F = 11.769 \in (3.042, +\infty) = K \quad \Rightarrow \quad H_0$ wird abgelehnt!
Die einfache Varianzanalyse kommt also zum Ergebnis, dass die Anzahl der bearbeiteten Zusatzblätter einen signifikanten ($\alpha = 0.05$) Einfluss auf die (mittlere) erreichte Punktzahl hat.

Aufgabe 8 (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6 Punkte)

Zur Erklärung der Höhe der deutschen Warenausfuhr y_i (in Milliarden Euro) durch die Höhe der deutschen Wareneinfuhr x_i (in Milliarden Euro) unterstellt man die Gültigkeit eines Zusammenhangs im Sinne des folgenden linearen Modells:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + u_i \qquad \text{mit} \quad u_i \overset{\text{iid}}{\sim} N(0, \sigma^2),\ i \in \{1, \ldots, n\}$$

Aus vorliegenden Daten zu den Jahren 2013–2019 wurde das lineare Modell mit der Statistik-Software R wie folgt geschätzt:

```
Call:
lm(formula = y ~ x)

Residuals:
      1       2       3       4       5       6       7
-24.542  -9.961  18.021  22.432  15.727  -7.730 -13.947

Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 157.98483   95.74477    1.65 0.159843
x             1.07205    0.09643   11.12 0.000103 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 20.16 on 5 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.9611,        Adjusted R-squared:  0.9533
F-statistic: 123.6 on 1 and 5 DF,  p-value: 0.0001026
```

(a) Geben Sie die realisierten Kleinst-Quadrate-Schätzwerte für β_1 und β_2 an.

(b) Geben Sie den realisierten Schätzwert für σ^2 an.

(c) Welcher Anteil der Gesamtvarianz der Höhe der deutschen Warenausfuhr wird durch das lineare Modell erklärt?

(d) Entscheiden Sie mit Hilfe des zugehörigen p-Werts zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.10$, ob β_1 signifikant positiv ist.

(e) Entscheiden Sie mit Hilfe des zugehörigen p-Werts zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.01$, ob β_2 signifikant von Null verschieden ist.

(f) Welche Warenausfuhrhöhe (in Milliarden Euro) prognostiziert das Modell für ein Jahr mit einer Wareneinfuhrhöhe von 1000 (in Milliarden Euro)?

Ergebnisse (ohne Begründung/Rechenweg):

(a) $\widehat{\beta}_1 = 157.98483$, $\widehat{\beta}_2 = 1.07205$

(b) $\widehat{\sigma^2} = 406.4256$

(c) 0.9611

(d) β_1 ist signifikant positiv.

(e) β_2 ist signifikant von Null verschieden.

(f) 1230.0348

Aufgabe 9 (6 + 2 + 3 + 3 + 5 = 19 Punkte)

Zur Schätzung eines einfachen linearen Regressionsmodells

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 \cdot x_i + u_i \qquad \text{mit} \quad u_i \overset{\text{iid}}{\sim} N(0, \sigma^2), \quad i \in \{1, \ldots, n\}$$

aus einer Stichprobe vom Umfang $n = 20$ wurden bereits die folgenden Zwischenwerte errechnet:

$$\sum_{i=1}^{20} y_i = 318.87; \quad \sum_{i=1}^{20} y_i^2 = 5603.84; \quad \sum_{i=1}^{20} x_i = 97.71;$$

$$\sum_{i=1}^{20} x_i^2 = 524.69; \quad \sum_{i=1}^{20} x_i \cdot y_i = 1710.24$$

(a) Schätzen Sie β_1 und β_2 mit Hilfe der Kleinst-Quadrate-Methode.

(b) Geben Sie mit Hilfe der bekannten erwartungstreuen Schätzfunktion für σ^2 den realisierten Schätzwert für σ^2 an.

(c) Berechnen Sie $\widehat{\sigma^2}_{\widehat{\beta}_1}$ und $\widehat{\sigma^2}_{\widehat{\beta}_2}$.

(d) Geben Sie ein symmetrisches Konfidenzintervall zur Vertrauenswahrscheinlichkeit $1 - \alpha = 0.90$ für β_1 an.

(e) Geben Sie ein Prognoseintervall zur Vertrauenswahrscheinlichkeit $1 - \alpha = 0.95$ für y_0 gegeben $x_0 = 5$ an.

Ergebnisse (ohne Begründung/Rechenweg):

(a) $\widehat{\beta}_1 = 0.2117$, $\widehat{\beta}_2 = 3.2201$

(b) $\widehat{\sigma}^2 = 1.6218$

(c) $\widehat{\sigma^2}_{\widehat{\beta}_1} = 0.89898$, $\widehat{\sigma^2}_{\widehat{\beta}_2} = 0.034267$

(d) $[-1.43, 1.85]$

(e) $[13.56, 19.06]$