Aufgabenstellung und Ergebnisse zur

Bachelor-Prüfung
Schliessende Statistik
Wintersemester 2017/18

Dr. Martin Becker

Hinweise für die Klausurteilnehmer

- Die Klausur besteht aus insgesamt 9 Aufgaben. Prüfen Sie die Vollständigkeit Ihres Exemplares nach; spätere Reklamationen können nicht berücksichtigt werden.
- Es sind insgesamt 120 Punkte (= 16 + 12 + 8 + 10 + 15 + 18 + 15 + 5 + 21) erreichbar.
- Als Hilfsmittel sind zugelassen: Taschenrechner (auch mit Grafikfähigkeit), 2 selbsterstellte DIN-A4 Blätter bzw. 4 selbsterstellte (einseitige) DIN-A4 Seiten. Benötigte Tabellen zur Normal- und t-Verteilung finden Sie am Ende dieses Klausurheftes.
- Bei der Korrektur werden **nur** die Lösungen auf den Seiten 1–10 berücksichtigt. Das letzte Blatt (Tabellen zur Normal- und t-Verteilung) darf abgetrennt werden.
- Bei mehreren Lösungsvorschlägen muss die gültige Lösung eindeutig gekennzeichnet sein.
- Mit Ausnahme der Multiple-Choice-Aufgaben muss der Lösungsweg klar ersichtlich sein.

Bewertungsteil — Bitte nicht beschreiben						
Aufgabe	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	Σ
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						
9						
Σ						

Aufgabe 1 (16 Punkte)

Markieren Sie jeweils mit einem Kreuz pro Aussage im betreffenden Kästchen, ob die unten stehenden Aussagen wahr oder falsch sind.
Richtige Antworten geben 2 Punkte, falsche Antworten und nicht bearbeitete Aussagen 0 Punkte (Aussagen mit zwei Kreuzen zählen als nicht bearbeitet!).

		wahr	falsch
1.	Sei $X_1, \dots, X_n$ eine einfache Stichprobe vom Umfang n zu Y. Dann sind $X_1, \dots, X_n$ stochastisch unabhängig und die Verteilung aller X_i stimmt mit der Verteilung von Y überein.	■	□
2.	Gilt für eine Familie $\widehat{\theta}_n, n \in \mathbb{N}$, von Schätzfunktionen für einen Parameter $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}$ unabhängig von θ sowohl $\mathrm{E}(\widehat{\theta}_n) = \theta$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ als auch $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}(\widehat{\theta}_n) = 0$, dann ist die Familie $\widehat{\theta}_n$ konsistent im quadratischen Mittel für θ.	■	□
3.	Konfidenzintervalle für den Erwartungswert bei unbekannter Varianz sind umso breiter, je größer die geschätzte (Stichproben-)Varianz ist.	■	□
4.	Statistische Hypothesentests sind typischerweise so konstruiert, dass die Teststatistik bei Gültigkeit der Nullhypothese mit einer größeren Wahrscheinlichkeit im kritischen Bereich liegt als bei Verletzung der Nullhypothese.	□	■
5.	Das Verkleinern des Signifikanzniveaus führt bei Anwendung des zweiseitigen t-Tests für den Erwartungswert bei unbekannter Varianz stets zu einer Verkleinerung des kritischen Bereichs.	■	□
6.	Mit Hilfe von Gütefunktionswerten kann man in Abhängigkeit der wahren Verteilungsparameter sowohl die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler als auch die Wahrscheinlichkeit für eine korrekte Entscheidung leicht berechnen. Für feste Verteilungsparameter addieren sich diese beiden Wahrscheinlichkeiten stets zu 1.	■	□
7.	Mit der einfachen Varianzanalyse können mehrere mit übereinstimmender Varianz normalverteilte Grundgesamtheiten daraufhin untersucht werden, ob ihre Erwartungswerte (ebenfalls) übereinstimmen.	■	□
8.	Im einfachen linearen Regressionsmodell $$y_i = \beta_1 + \beta_2 \cdot x_i + u_i, \quad u_i \overset{\text{iid}}{\sim} N(0, \sigma^2),$$ sind die Kleinst-Quadrate-Schätzfunktionen $\widehat{\beta}_1$ und $\widehat{\beta}_2$ stets stochastisch unabhängig.	□	■

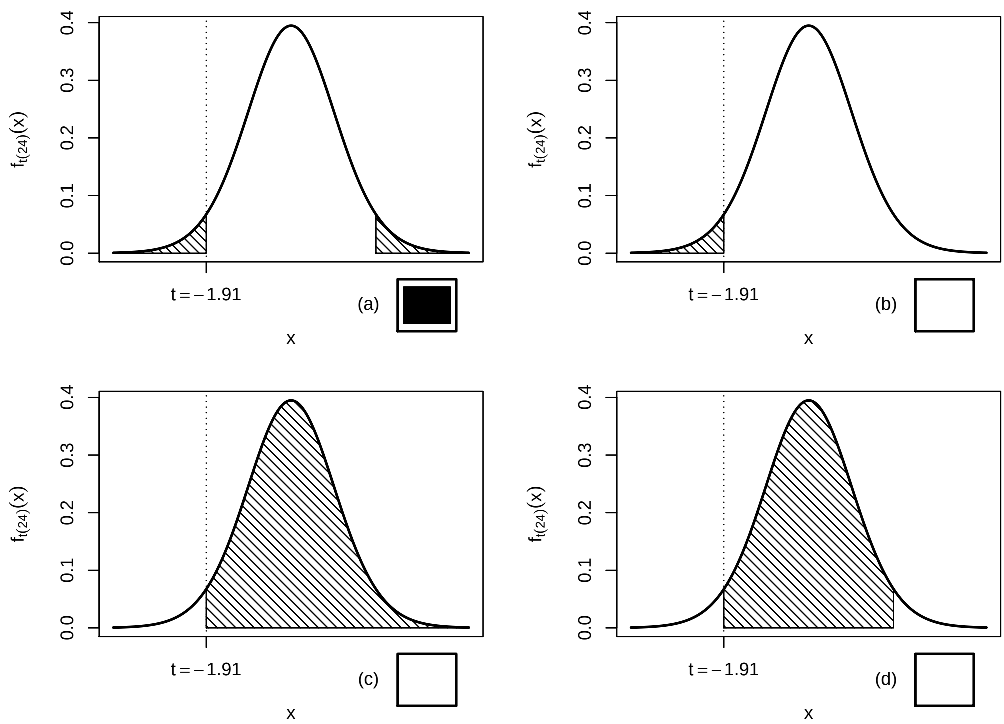
Aufgabe 2 (12 Punkte)

Markieren Sie jeweils die korrekte Antwort mit einem Kreuz im betreffenden Kästchen. Es ist jeweils genau ein Kreuz korrekt.
Richtige Antworten geben 3 Punkte, falsche Antworten und nicht bearbeitete Aufgabenteile 0 Punkte (Aufgabenteile mit mehr als einem Kreuz zählen als nicht bearbeitet!).

1. Sei $X_1, \dots, X_{25}$ eine einfache Stichprobe zu einer $N(\mu, \sigma^2)$-verteilten Zufallsvariablen Y mit unbekannten Parametern μ und σ^2. Auf der Grundlage einer Stichprobenrealisation zu dieser einfachen Stichprobe vom Umfang $n = 25$ soll

$$H_0 : \mu = \mu_0 = 25 \qquad \text{gegen} \qquad H_1 : \mu \neq \mu_0 = 25$$

mit einem t-Test getestet werden. Als realisierte Teststatistik erhält man $t = -1.91$. Markieren Sie die Abbildung, welche den p-Wert in der beschriebenen Situation korrekt als Inhalt der schraffierten Fläche unter der Dichtefunktion der Verteilung der Teststatistik unter H_0 (für $\mu = \mu_0$) darstellt.

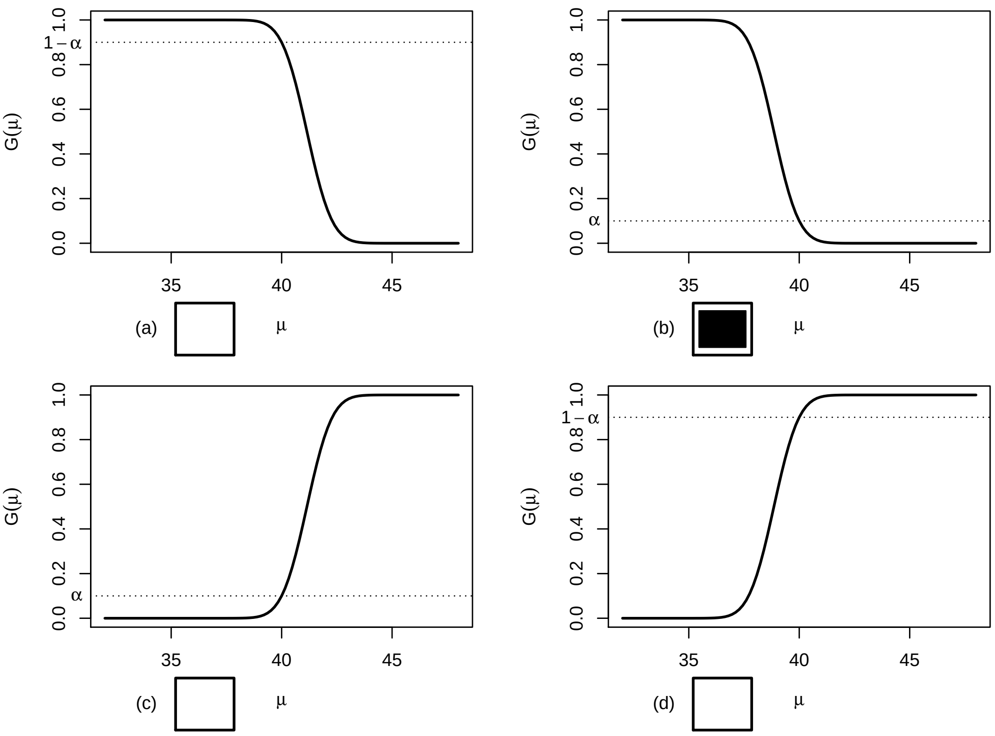


2. Auf Grundlage zweier unabhängiger einfacher Stichproben $X_1^A, \dots, X_{n_A}^A$ vom Umfang n_A zu Y^A und $X_1^B, \dots, X_{n_B}^B$ vom Umfang n_B zu Y^B soll unter der Annahme, dass Y^A und Y^B jeweils normalverteilt sind mit unbekannter, aber übereinstimmender Varianz, mit einem Signifikanztest überprüft werden, ob $\mathrm{E}(Y^A) < \mathrm{E}(Y^B)$ gilt. Zur Untersuchung dieser Fragestellung sind die folgenden aus der Vorlesung bekannten Verfahren geeignet:
   - (a) Nur die Varianzanalyse ☐
   - (b) Nur der 2-Stichproben-t-Test für den Mittelwert ☒
   - (c) Nur der t-Differenzentest für verbundene Stichproben ☐
   - (d) Die Varianzanalyse und (äquivalent) der 2-Stichproben-t-Test für den Mittelwert ☐

3. Auf der Grundlage einer einfachen Stichprobe $X_1, \ldots, X_{20}$ vom Umfang $n = 20$ zu einer $N(\mu, 4^2)$-verteilten Zufallsvariablen wird ein Gauß-Test zur Überprüfung der Hypothesen

$$H_0 : \mu \geq 40 \qquad \text{gegen} \qquad H_1 : \mu < 40$$

bei einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0.1$ betrachtet.
Markieren Sie die Abbildung, welche die Gütefunktion des oben genannten Tests korrekt darstellt.



4. Bei der Durchführung eines rechtsseitigen Gauß-Tests für den Mittelwert einer normalverteilten Grundgesamtheit bei bekannter Varianz (mit $H_0 : \mu \leq \mu_0$ gegen $H_1 : \mu > \mu_0$) wird die Nullhypothese zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ abgelehnt. Dann gilt für die Testentscheidungen des linksseitigen (mit $H_0 : \mu \geq \mu_0$ gegen $H_1 : \mu < \mu_0$) und zweiseitigen (mit $H_0 : \mu = \mu_0$ gegen $H_1 : \mu \neq \mu_0$) Tests (bei unverändertem Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$):

   (a) Der linksseitige Test lehnt H_0 nicht ab, der zweiseitige Test lehnt H_0 ab. ☐

   (b) Der linksseitige Test lehnt H_0 ab, der zweiseitige Test lehnt H_0 nicht ab. ☐

   (c) Der linksseitige Test lehnt H_0 nicht ab, die Entscheidung des zweiseitigen Tests kann für oder gegen H_0 ausfallen. ☒

   (d) Der linksseitige Test lehnt H_0 ab, die Entscheidung des zweiseitigen Tests kann für oder gegen H_0 ausfallen. ☐

Aufgabe 3 (2 + 3 + 3 = 8 Punkte)

Zu $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ liegen die unabhängigen einfachen Stichproben $X_1^A, \ldots, X_{30}^A$ vom Umfang 30 und $X_1^B, \ldots, X_{10}^B$ vom Umfang 10 vor. Mit $\overline{X^A} := \frac{1}{30}\sum_{i=1}^{30} X_i^A$ und $\overline{X^B} := \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} X_i^B$ werden die Schätzfunktionen

- $\widehat{\mu}_1 = \dfrac{1}{4} \cdot \overline{X^A} + \dfrac{1}{4} \cdot \overline{X^B}$,
- $\widehat{\mu}_2 = \dfrac{1}{4} \cdot \overline{X^A} + \dfrac{3}{4} \cdot \overline{X^B}$ und
- $\widehat{\mu}_3 = \dfrac{3}{4} \cdot \overline{X^A} + \dfrac{1}{4} \cdot \overline{X^B}$

zur Schätzung von μ betrachtet.

(a) Wie sind $\overline{X^A}$ und $\overline{X^B}$ verteilt?

(b) Welche der Schätzfunktionen $\widehat{\mu}_1$, $\widehat{\mu}_2$ und $\widehat{\mu}_3$ sind erwartungstreu für μ? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Berechnen Sie zu den für μ erwartungstreuen Schätzfunktionen die zugehörige Varianz. Welche dieser Schätzfunktionen würden Sie am ehesten zur Schätzung von μ einsetzen? Begründen Sie Ihre Antwort.

Ergebnisse (ohne Begründung/Rechenweg):

(a) Es gilt $\overline{X^A} \sim N\big(\mu, \frac{\sigma^2}{30}\big)$ und $\overline{X^B} \sim N\big(\mu, \frac{\sigma^2}{10}\big)$.

(b) Erwartungstreu sind $\widehat{\mu}_2$ und $\widehat{\mu}_3$

(c) $\mathrm{Var}(\widehat{\mu}_2) = \frac{7}{120} \cdot \sigma^2$, $\mathrm{Var}(\widehat{\mu}_3) = \frac{1}{40} \cdot \sigma^2 \Rightarrow \widehat{\mu}_3$ am ehesten zur Schätzung einsetzen.

Aufgabe 4 (6 + 3 + 1 = 10 Punkte)

Die Verteilung einer Zufallsvariablen Y sei in Abhängigkeit des unbekannten Parameters $a > 0$ durch die folgende Dichtefunktion gegeben:

$$f_Y(y|a) = \begin{cases} \dfrac{3 \cdot a^3}{y^4} & \text{für } y \geq a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Der Parameter a soll auf Grundlage einer einfachen Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ vom Umfang n geschätzt werden.

(a) Bestimmen Sie den Schätzer $\widehat{a}_{ML}$ nach der Maximum-Likelihood-Methode.

(b) Zeigen Sie, dass $E(Y) = \frac{3}{2} \cdot a$ gilt.

(c) Bestimmen Sie den Schätzer $\widehat{a}_{MM}$ nach der Methode der Momente.

Hinweise:

- *Beachten Sie, dass Sie Teil (b) auch ohne die Bearbeitung von Teil (a) und Teil (c) ohne die Bearbeitung der Teile (a) und (b) lösen können.*
- *Falls sich der ML-Schätzer als lokale Extremstelle einer differenzierbaren Funktion bestimmen lässt, muss* **nicht** *überprüft werden (z.B. mit Hilfe der 2. Ableitung), ob tatsächlich eine Maximalstelle vorliegt.*

Ergebnisse (ohne Begründung/Rechenweg):

(a) $\widehat{a}_{ML} = \min\{x_1, \ldots, x_n\}$

(b) Nachweis durch Berechnung des Erwartungswerts

(c) $\widehat{a}_{MM} = \frac{2}{3} \cdot \overline{x}$

Aufgabe 5 (3 + 7 + 2 + 3 = 15 Punkte)

Bei der Abfüllung von Nasenspray weiß der Hersteller aus Erfahrung, dass die verwendete Maschine eine Standardabweichung von $0.15[ml]$ für die abgefüllte Menge hat. Nach einer Inventur hat der Hersteller den Verdacht, dass die Abfüllanlage im Mittel weniger als die auf dem Produkt ausgezeichneten $10[ml]$ in die Sprühflaschen einfüllt. Dies soll mit einem statistischen Test überprüft werden. Hierzu werden der Produktion 9 Sprühflaschen entnommen, deren gemessene Füllmengen $x_1, \ldots, x_9$ als Realisation einer einfachen Stichprobe vom Umfang 9 zur annahmegemäß $N(\mu, 0.15^2[ml^2])$-verteilten Abfüllmenge betrachtet werden können. Als Stichprobenmittelwert ergibt sich dabei

$$\overline{x} = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9} x_i = 9.875[ml] \; .$$

(a) Geben Sie auf Basis der Stichprobenrealisation ein zweiseitiges Konfidenzintervall für die mittlere Abfüllmenge zur Sicherheitswahrscheinlichkeit $1 - \alpha = 0.99$(!) an.

(b) Testen Sie zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$, ob der Verdacht der Herstellerfirma bestätigt werden kann. Fassen Sie das Ergebnis des Tests in einem Antwortsatz zusammen.

(c) Berechnen Sie den p-Wert zum Test aus Teil (b). Wie wäre die Entscheidung zum Test aus Teil (b) bei einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0.01$ ausgefallen?

(d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei der Ziehung einer Stichprobe und der anschließenden Durchführung des Tests aus Teil (b) eine Testentscheidung zu Gunsten der Gegenhypothese zu erhalten, falls die tatsächliche mittlere Abfüllmenge $10.05[ml]$ beträgt?

Ergebnisse (ohne Begründung/Rechenweg):

(a) Realisiertes symm. Konfidenzintervall zum Konf.-niveau $1-\alpha = 0.99$: $[9.746, 10.004]$

(b) $N = -2.5 \in (-\infty, -1.645) = K \quad \Rightarrow \quad H_0$ wird abgelehnt!

Der Test bestätigt also den Verdacht der Herstellerfirma, dass die von der Maschine abgefüllte Menge im Mittel zu niedrig ist.

(c) p-Wert $p = 0.0062$. Entscheidung wäre zu Gunsten der Gegenhypothese ausgefallen.

(d) $\alpha(10.05) = 0.004$

Aufgabe 6 (10 + 8 = 18 Punkte)

Es werde angenommen, dass die (in mAh bei festem Entladestrom gemessene) Kapazität Y^A des aktuell von einem Taschenlampenhersteller verwendeten Lithium-Ionen-Akkutyps normalverteilt sei mit unbekanntem Erwartungswert μ_A und unbekannter Varianz σ_A^2. Der Taschenlampenhersteller erwägt, seine Taschenlampen zukünftig mit einem alternativen Lithium-Ionen-Akkutyp auszuliefern, dessen Kapazität Y^B ebenfalls als normalverteilt (mit unbekanntem Erwartungswert μ_B und unbekannter Varianz σ_B^2) angenommen werden kann. Es soll überprüft werden, ob der alternative Akkutyp im Mittel eine höhere Kapazität als der aktuell verwendete Typ besitzt.
Aus einer Kapazitätsmessung mit $n_A = 8$ Exemplaren des aktuell verwendeten Akkutyps und $n_B = 10$ Exemplaren des alternativen Akkutyps erhielt man Realisationen jeweils voneinander unabhängiger einfacher Stichproben $X_1^A, \ldots, X_8^A$ zu Y^A sowie $X_1^B, \ldots, X_{10}^B$ zu Y^B und hieraus die zugehörigen Mittelwerte $\overline{x^A} = 2984$ bzw. $\overline{x^B} = 3134$ sowie die Stichproben**standardabweichungen** $s_{Y^A} = 117$ bzw. $s_{Y^B} = 106$.

(a) Testen Sie unter der Annahme $\sigma_A^2 = \sigma_B^2$ zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ die Hypothese, dass der alternative Akkutyp im Mittel eine höhere Kapazität als der aktuell verwendete Typ besitzt. Fassen Sie das Ergebnis des Tests in einem Antwortsatz zusammen.

(b) Überprüfen Sie mit einem geeigneten Test zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.10$, ob die in Teil (a) getroffene Annahme der Varianzgleichheit auf Grundlage der vorhandenen Stichprobeninformation verworfen werden muss. Fassen Sie das Ergebnis des Tests in einem Antwortsatz zusammen.

Hinweis: Verwenden Sie für Teil (b) den folgenden Tabellenausschnitt mit 0.95*-Quantilen von* $F(m,n)$*-Verteilungen sowie ggf. die Rechenregel* $F_{m,n;p} = \frac{1}{F_{n,m;1-p}}$.

$n\backslash m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	161.448	199.500	215.707	224.583	230.162	233.986	236.768	238.883	240.543	241.882
2	18.513	19.000	19.164	19.247	19.296	19.330	19.353	19.371	19.385	19.396
3	10.128	9.552	9.277	9.117	9.013	8.941	8.887	8.845	8.812	8.786
4	7.709	6.944	6.591	6.388	6.256	6.163	6.094	6.041	5.999	5.964
5	6.608	5.786	5.409	5.192	5.050	4.950	4.876	4.818	4.772	4.735
6	5.987	5.143	4.757	4.534	4.387	4.284	4.207	4.147	4.099	4.060
7	5.591	4.737	4.347	4.120	3.972	3.866	3.787	3.726	3.677	3.637
8	5.318	4.459	4.066	3.838	3.687	3.581	3.500	3.438	3.388	3.347
9	5.117	4.256	3.863	3.633	3.482	3.374	3.293	3.230	3.179	3.137
10	4.965	4.103	3.708	3.478	3.326	3.217	3.135	3.072	3.020	2.978

Ergebnisse (ohne Begründung/Rechenweg):

(a) $t = -2.85 \in (-\infty, -1.746) = K \quad \Rightarrow \quad H_0$ wird abgelehnt!

Der Test kann also die Vermutung, dass der alternative Akkutyp im Mittel eine höhere Kapazität als der aktuell verwendete Typ besitzt, bestätigen.

(b) $F = 1.218 \notin [0, 0.272) \cup (3.293, +\infty) = K \quad \Rightarrow \quad H_0$ wird nicht abgelehnt!

Der Test findet also keine Anzeichen für eine Verletzung der in Teil (a) angenommenen Varianzgleichheit.

Aufgabe 7 (10 + 3 + 2 = 15 Punkte)

In einer bestimmten Multiple-Choice-Aufgabe ist genau eine von vier Antwortmöglichkeiten, die mit „A“, „B“, „C“ bzw. „D“ bezeichnet sind, korrekt. Bei der Korrektur der Klausur stellt der Dozent fest, dass die von den Teilnehmern der Klausur abgegebenen Antworten wie folgt verteilt sind:

Antwort	A	B	C	D
Anteil in Prozent	20	30	18	32

Der Dozent fragt sich, ob man bei dieser Verteilung der abgegebenen Antworten davon ausgehen kann, dass sich die Teilnehmer der Klausur rein zufällig (und voneinander unabhängig) für eine der vier Antworten entschieden haben.

(a) Gehen Sie zunächst davon aus, dass 300 Studierende an der Klausur teilgenommen (und die Aufgabe bearbeitet) haben. Überprüfen Sie unter der Annahme, dass sich die abgegebenen Antworten als einfache Stichprobe auffassen lassen, mit einem geeigneten statistischen Test, ob sich die Prüflinge rein zufällig für eine der vier Antworten entschieden haben oder nicht (Signifikanzniveau $\alpha = 0.01$ **(!)**).

(b) Würde sich das Ergebnis des Tests aus Teil (a) ändern, wenn nur 150 Prüflinge an der Klausur teilgenommen (und die Aufgabe bearbeitet) hätten? Begründen Sie Ihre Antwort! (*Beachten Sie, dass Sie den Test nicht komplett neu durchführen müssen und insbesondere die realisierte Teststatistik relativ leicht aus dem Ergebnis des vorherigen Aufgabenteils gewinnen können!*)

(c) Ab welcher Anzahl von Klausurteilnehmern würde eine Durchführung des bereits in den Teilen (a) und (b) verwendeten Tests dazu führen, davon auszugehen, dass sich die Prüflinge *nicht* rein zufällig für eine der vier Antwortmöglichkeiten entschieden haben?

Hinweis: Verwenden Sie den folgenden Tabellenausschnitt mit p-Quantilen von $\chi^2(n)$-Verteilungen:

$n\backslash p$	0.01	0.025	0.05	0.50	0.90	0.95	0.975	0.99
1	0.000	0.001	0.004	0.455	2.706	3.841	5.024	6.635
2	0.020	0.051	0.103	1.386	4.605	5.991	7.378	9.210
3	0.115	0.216	0.352	2.366	6.251	7.815	9.348	11.345
4	0.297	0.484	0.711	3.357	7.779	9.488	11.143	13.277
5	0.554	0.831	1.145	4.351	9.236	11.070	12.833	15.086

Ergebnisse (ohne Begründung/Rechenweg):

(a) $\chi^2 = 17.76 \in (11.345, +\infty) = K \quad \Rightarrow \quad H_0$ wird abgelehnt!

Der Test kommt also zum Ergebnis, dass sich die Prüflinge nicht rein zufällig für eine der vier Antwortmöglichkeiten entschieden haben.

(b) $\chi^2 = 8.88 \notin (11.345, +\infty) = K \quad \Rightarrow \quad H_0$ wird nicht abgelehnt!

Der Test kommt nun zum Ergebnis, dass sich die Prüflinge rein zufällig für eine der vier Antwortmöglichkeiten entschieden haben.

(c) Es müssen mindestens 192 Prüflinge an der Klausur teilgenommen haben.

Aufgabe 8 (1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5 Punkte)

Zur Erklärung des Erdgaspreises je Mio. BTU y_i (in US-Dollar) durch den Erdölpreis je Barrel x_i (in US-Dollar) unterstellt man die Gültigkeit eines Zusammenhangs im Sinne des folgenden linearen Modells:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + u_i \qquad \text{mit} \quad u_i \overset{\text{iid}}{\sim} N(0, \sigma^2),\ i \in \{1, \ldots, n\}$$

Aus vorliegenden Daten zu den Jahren 2010–2016 wurde das lineare Modell mit der Statistik-Software R wie folgt geschätzt:

```
Call:
lm(formula = y ~ x)

Residuals:
      1       2       3       4       5       6       7 
-0.2309 -0.7273  0.1330  0.7239 -0.1521  1.1144 -0.8609 

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)    
(Intercept)  1.58394    1.02301   1.548 0.182227    
x            0.08710    0.01129   7.718 0.000583 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 0.7912 on 5 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.9226,	Adjusted R-squared:  0.9071 
F-statistic: 59.56 on 1 and 5 DF,  p-value: 0.0005831
```

(a) Geben Sie die realisierten Kleinst-Quadrate-Schätzwerte für β_1 und β_2 an.

(b) Geben Sie den realisierten Schätzwert für σ^2 an.

(c) Entscheiden Sie mit Hilfe des zugehörigen p-Werts zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.10$, ob β_1 signifikant positiv ist.

(d) Entscheiden Sie mit Hilfe des zugehörigen p-Werts zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.001$, ob β_2 signifikant von Null verschieden ist.

(e) Welchen Erdgaspreis je Mio. BTU (in US-Dollar) prognostiziert das Modell für ein Jahr mit einem Erdölpreis je Barrel von 70 (in US-Dollar)?

Ergebnisse (ohne Begründung/Rechenweg):

(a) $\widehat{\beta}_1 = 1.58394$, $\widehat{\beta}_2 = 0.0871$

(b) $\widehat{\sigma^2} = 0.626$

(c) β_1 ist signifikant positiv.

(d) β_2 ist signifikant von Null verschieden.

(e) 7.6809

Aufgabe 9 (6 + 2 + 3 + 5 + 5 = 21 Punkte)

Zur Schätzung eines einfachen linearen Regressionsmodells

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 \cdot x_i + u_i \qquad \text{mit} \quad u_i \overset{\text{iid}}{\sim} N(0, \sigma^2), \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

aus einer Stichprobe vom Umfang $n = 20$ wurden bereits die folgenden Zwischenwerte errechnet:

$$\sum_{i=1}^{20} y_i = 339.593; \quad \sum_{i=1}^{20} y_i^2 = 5903.002; \quad \sum_{i=1}^{20} x_i = 93.608;$$

$$\sum_{i=1}^{20} x_i^2 = 481.297; \quad \sum_{i=1}^{20} x_i \cdot y_i = 1632.131$$

(a) Schätzen Sie β_1 und β_2 mit Hilfe der Kleinst-Quadrate-Methode.

(b) Geben Sie mit Hilfe der bekannten erwartungstreuen Schätzfunktion für σ^2 den realisierten Schätzwert für σ^2 an.

(c) Berechnen Sie $\widehat{\sigma^2}_{\widehat{\beta}_1}$ und $\widehat{\sigma^2}_{\widehat{\beta}_2}$.

(d) Überprüfen Sie zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.01$ **(!)**, ob β_2 signifikant positiv ist. Fassen Sie das Ergebnis auch in einem Antwortsatz zusammen.

(e) Geben Sie ein Prognoseintervall zur Vertrauenswahrscheinlichkeit $1 - \alpha = 0.90$ für y_0 gegeben $x_0 = 5$ an.

Ergebnisse (ohne Begründung/Rechenweg):

(a) $\widehat{\beta}_1 = 12.3502$, $\widehat{\beta}_2 = 0.98911$

(b) $\widehat{\sigma}^2 = 5.2571$

(c) $\widehat{\sigma^2}_{\widehat{\beta}_1} = 2.9303$, $\widehat{\sigma^2}_{\widehat{\beta}_2} = 0.12177$

(d) $t = 2.834 \in (2.552, +\infty) = K \quad \Rightarrow \quad H_0$ wird abgelehnt!

β_2 ist also signifikant positiv.

(e) $[13.217, 21.374]$