

**WIRTSCHAFTSWISSENSCHAFTLICHES
PRÜFUNGSSEKRETARIAT**

DER RECHTS- UND WIRTSCHAFTSWISSENSCHAFTLICHEN FAKULTÄT
DER UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Von der/dem Studierenden auszufüllen (Bitte leserlich und in Blockschrift):

Name der Prüfung: Deskriptive Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung
Semester, dem die Prüfung zugeordnet ist: WS 2015/2016 (z. B. WS 2015/2016, SS 2016)
(Prüfungen im Februar/April = WS; Prüfungen im August/Oktobre = SS)
Nachname, Vorname der/des Studierenden: _____
Matrikelnummer der/des Studierenden: _____

Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass mir die für diese Prüfung relevanten Zulassungsvoraussetzungen aus der für mich geltenden Prüfungsordnung bekannt sind.

Mir ist damit bewusst, dass diese Prüfungsleistung als nicht abgelegt zählt, wenn die hierfür vorgesehenen Zulassungsvoraussetzungen nicht erfüllt sind.

Mir ist bekannt, dass die Teilnahme an der Prüfung zudem die ordnungsgemäße Anmeldung zur Prüfung voraussetzt. Die Teilnahme bei versäumter Anmeldung hat die Ungültigkeit der Prüfung zur Folge.

Zudem ist mir bekannt, dass eine nicht bestandene Prüfung zweimal wiederholt werden kann. Die Wiederholung einer bestandenen Prüfung ist nicht zulässig.

Datum: _____ **Unterschrift der/des Studierenden:** _____

Von der Prüferin/Vom Prüfer auszufüllen:

Aufgabe	Punkte	Max. Punkte	Bemerkungen
1		16	
2		12	
3		15	
4		16	
5		5	
6		10	
7		22	
8		15	
9		9	
<i>Summe</i>		120	

bestanden

Note: _____

nicht bestanden

Unterschrift der Prüferin/des Prüfers: _____

KLAUSURHEFT ZUR
 BACHELOR-PRÜFUNG
 DESKRIPTIVE STATISTIK UND WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG
 WINTERSEMESTER 2015/16

Dr. Martin Becker

Hinweise für die Klausurteilnehmer

- Die Klausur besteht aus insgesamt 9 Aufgaben. Prüfen Sie die Vollständigkeit Ihres Exemplares nach; spätere Reklamationen können nicht berücksichtigt werden.
- Es sind insgesamt 120 Punkte (= 16 + 12 + 15 + 16 + 5 + 10 + 22 + 15 + 9) erreichbar.
- Als Hilfsmittel sind zugelassen: Taschenrechner (auch mit Grafikfähigkeit), 2 selbstgestellte DIN-A4 Blätter bzw. 4 selbstgestellte (einseitige) DIN-A4 Seiten. Benötigte Tabellen finden Sie am Ende dieses Klausurheftes.
- Bei der Korrektur werden **nur** die Lösungen auf diesen Blättern berücksichtigt.
- Bei mehreren Lösungsvorschlägen muss die gültige Lösung eindeutig gekennzeichnet sein.
- Mit Ausnahme der Multiple-Choice-Aufgaben muss der Lösungsweg klar ersichtlich sein.

Bewertungsteil — Bitte nicht beschreiben						
Aufgabe	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	Σ
1		■	■	■	■	
2		■	■	■	■	
3					■	
4					■	
5				■	■	
6				■	■	
7						
8					■	
9				■	■	
Σ						

Aufgabe 1 (16 Punkte)

Markieren Sie jeweils mit einem Kreuz pro Aussage im betreffenden Kästchen, ob die unten stehenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Richtige Antworten geben 2 Punkte, falsche Antworten und nicht bearbeitete Aussagen 0 Punkte (Aussagen mit zwei Kreuzen zählen als nicht bearbeitet!).

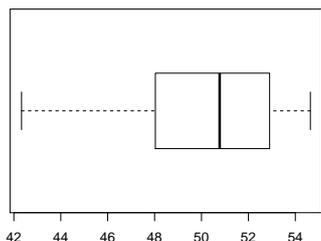
- | | wahr | falsch |
|---|--------------------------|--------------------------|
| 1. Sind alle n Einträge einer Urliste der Länge n zu einem mindestens ordinalskalierten Merkmal X verschieden, so besteht auch die Urliste zum zugehörigen Rangmerkmal $\text{rg}(X)$ aus n unterschiedlichen Werten. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 2. Ist a_i eine Ausprägung des Merkmals X und b_j eine Ausprägung des Merkmals Y auf derselben Menge von Merkmalsträgern, dann ist (a_i, b_j) stets eine Ausprägung des zugehörigen zweidimensionalen Merkmals (X, Y) . | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 3. Für den korrigierten Pearsonschen Kontingenzkoeffizienten $C_{X,Y}^{\text{kor}}^{\text{kor}}$ zweier Merkmale X und Y gilt stets $0 \leq C_{X,Y}^{\text{kor}}^{\text{kor}} \leq 1$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 4. Beim gleichzeitigen Würfeln mit zwei (fairen) Würfeln ist es wahrscheinlicher, für die Summe der Punktzahlen den Wert 11 als den Wert 2 zu erhalten. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 5. Wenn Sie alle 8 Aufgabenteile dieser Aufgabe rein zufällig mit <i>wahr</i> oder <i>falsch</i> beantworten, dann beträgt der Erwartungswert Ihrer in dieser Aufgabe erreichten Punktzahl 4. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 6. Es seien (Ω, \mathcal{F}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum, $A, B, C \in \mathcal{F}$ drei Ereignisse mit $P(C) > 0$. Dann gilt:
$P(A C) < P(B C) \quad \Rightarrow \quad P(A) < P(B)$ | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 7. Für eine Zufallsvariable X gelte $P(X \in \{0, 8, 15\}) = 1$. Damit ist X eine diskrete Zufallsvariable. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 8. Liegen alle Trägerpunkte eines zweidimensionalen Zufallsvektors (X, Y) auf einer Geraden mit der Steigung -0.8 , so gilt $\text{Korr}(X, Y) = -0.8$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Aufgabe 2 (12 Punkte)

Markieren Sie jeweils die korrekte Antwort mit einem Kreuz im betreffenden Kästchen. Es ist jeweils genau ein Kreuz korrekt.

Richtige Antworten geben 3 Punkte, falsche Antworten und nicht bearbeitete Aufgabenteile 0 Punkte (Aufgabenteile mit mehr als einem Kreuz zählen als nicht bearbeitet!).

1. Kreuzen Sie an, auf welche Merkmalseigenschaften der folgende Box-Plot *am ehesten* hindeutet:



- (a) leptokurtisch und rechtssteil
- (b) leptokurtisch und linkssteil
- (c) platykurtisch und rechtssteil
- (d) platykurtisch und linkssteil

2. Die 4-stellige Gewinnzahl einer Lotterie wird durch Ziehen **ohne Zurücklegen unter Berücksichtigung der Reihenfolge** aus einer Urne mit den Ziffern $\{1, 2, \dots, 9\}$ gebildet. Dann beträgt die Anzahl der möglichen Gewinnzahlen insgesamt:

- (a) $(9)_4 = \frac{9!}{5!}$
- (b) $\binom{9}{4} = \frac{9!}{4! \cdot 5!}$
- (c) 9^4
- (d) 4^9

3. Die Anzahl der verschiedenen 4-stelligen Zahlen, die aus den Ziffern 3, 7, 9 und 9 gebildet werden können (eine der möglichen Zahlen ist also 9973), beträgt:

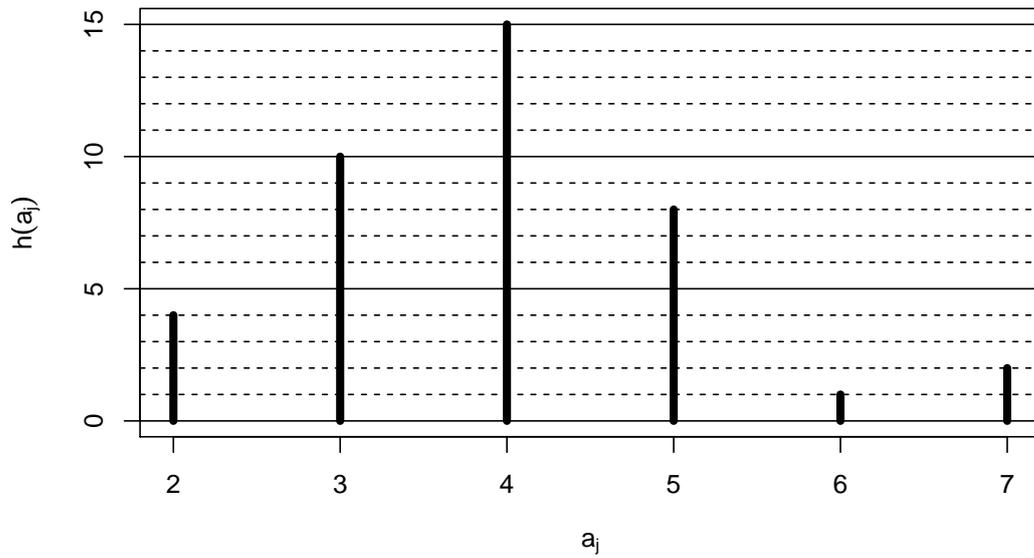
- (a) $\frac{3799!}{3! \cdot 7! \cdot 9! \cdot 9!}$
- (b) $\frac{4!}{1! \cdot 1! \cdot 2!}$
- (c) $\frac{28!}{3! \cdot 7! \cdot 9! \cdot 9!}$
- (d) $\frac{28!}{1! \cdot 1! \cdot 2!}$

4. Für $n \in \mathbb{N}$ seien die Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n unabhängig identisch verteilt mit $E(X_i) = \mu$ und $\text{Var}(X_i) = \sigma^2$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$. Dann gilt für $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$

- (a) $E(\bar{X}) = \frac{\mu}{n}$ und $\text{Var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$
- (b) $E(\bar{X}) = \mu$ und $\text{Var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$
- (c) $E(\bar{X}) = \frac{\mu}{n}$ und $\text{Var}(\bar{X}) = \sigma^2$
- (d) $E(\bar{X}) = \mu$ und $\text{Var}(\bar{X}) = \sigma^2$

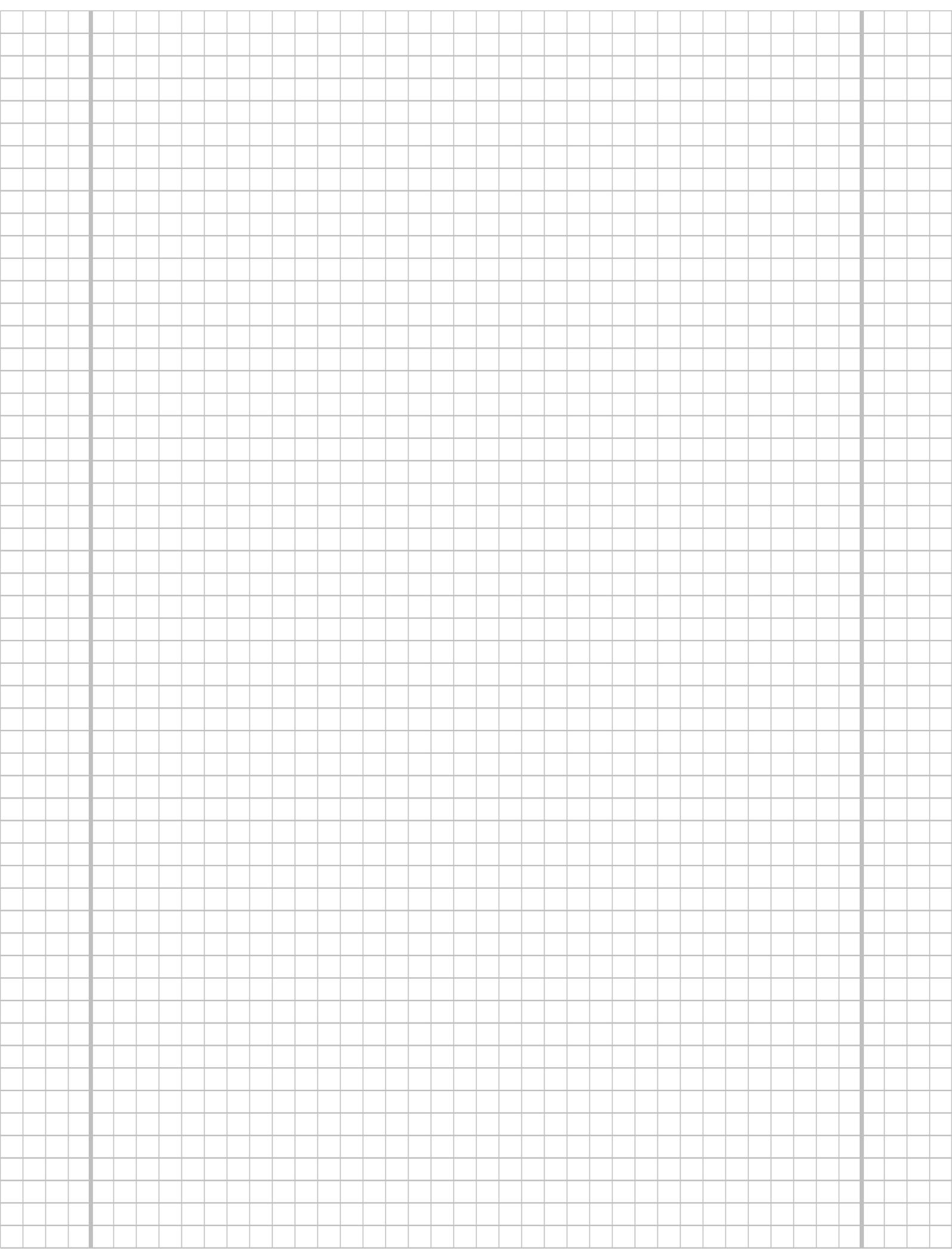
Aufgabe 3 (4 + 5 + 3 + 3 = 15 Punkte)

Zu einem erhobenen Merkmal X sei das folgende Stabdiagramm gegeben:



- (a) Erstellen Sie eine Tabelle der absoluten und relativen Häufigkeiten.
- (b) Berechnen Sie den arithmetischen Mittelwert und die empirische Varianz des Merkmals X .
- (c) Geben Sie die empirische Verteilungsfunktion des Merkmals X an.
- (d) Berechnen Sie ein unteres Quartil, ein oberes Quartil und den zugehörigen Interquartilsabstand des Merkmals X .





Aufgabe 4 (6 + 4 + 3 + 3 = 16 Punkte)

Zu einem kardinalskalierten Merkmal sei die folgende (zur einfacheren Bearbeitung der Aufgabe bereits sortierte) Urliste der Länge $n = 30$ gegeben:

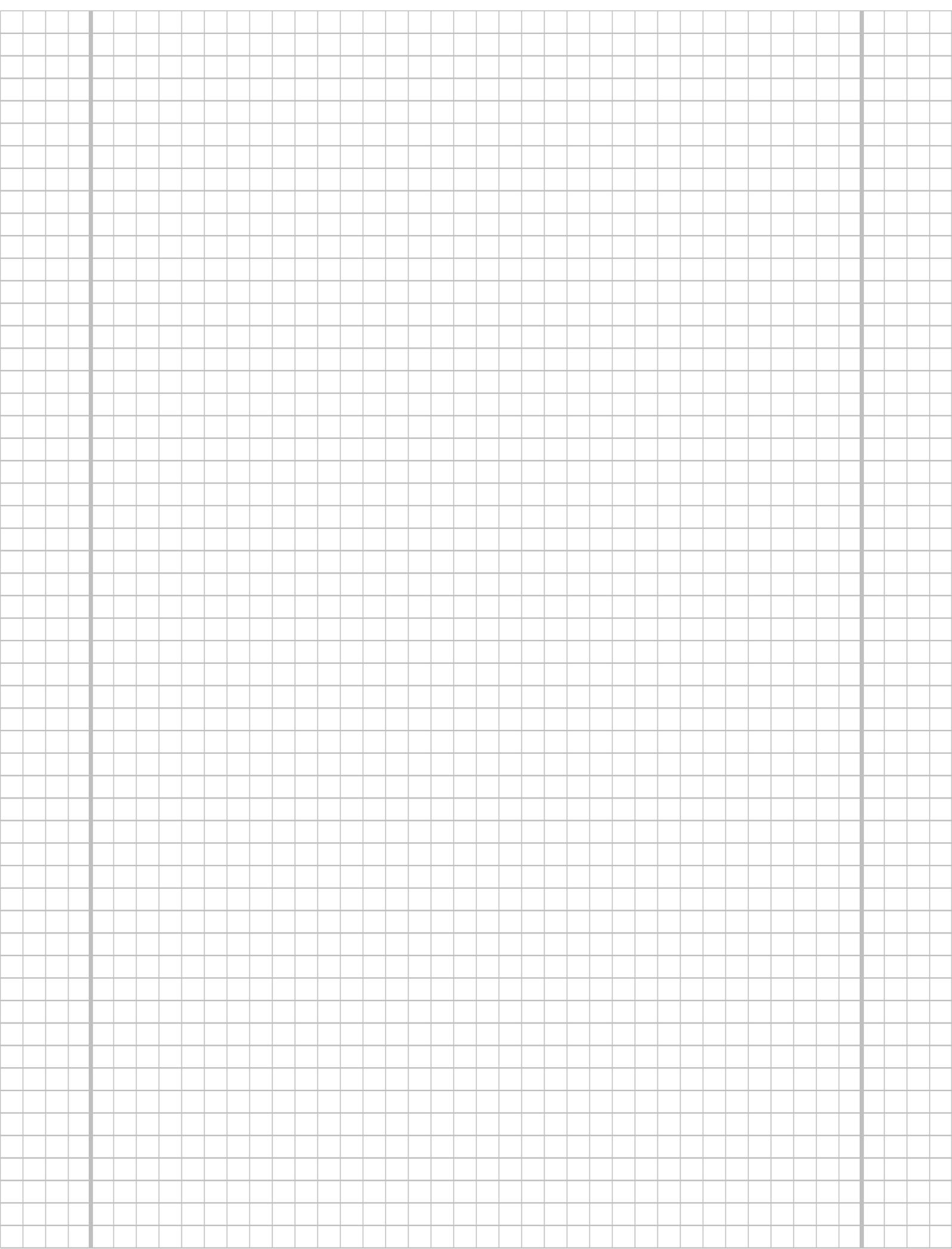
22.73, 23.57, 26.90, 29.07, 30.76, 30.77, 36.97, 37.46, 37.90, 38.26, 39.24, 39.52, 39.78, 39.81, 40.14, 41.10, 49.05, 52.59, 57.52, 58.16, 58.90, 59.32, 59.57, 60.60, 60.60, 61.24, 62.18, 65.46, 72.75, 73.65

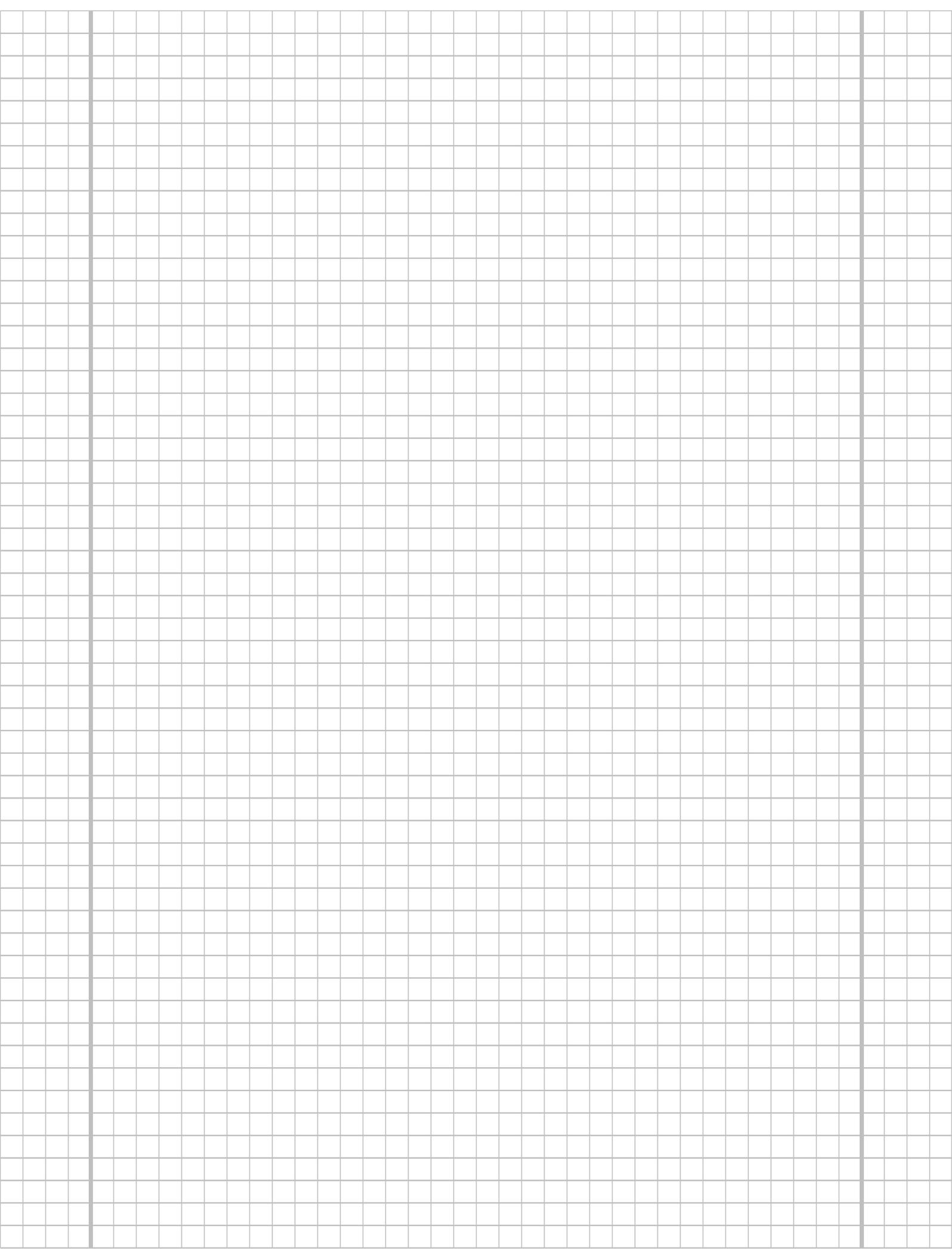
- (a) Führen Sie eine Klassierung der erhobenen Daten auf Grundlage der Klassen

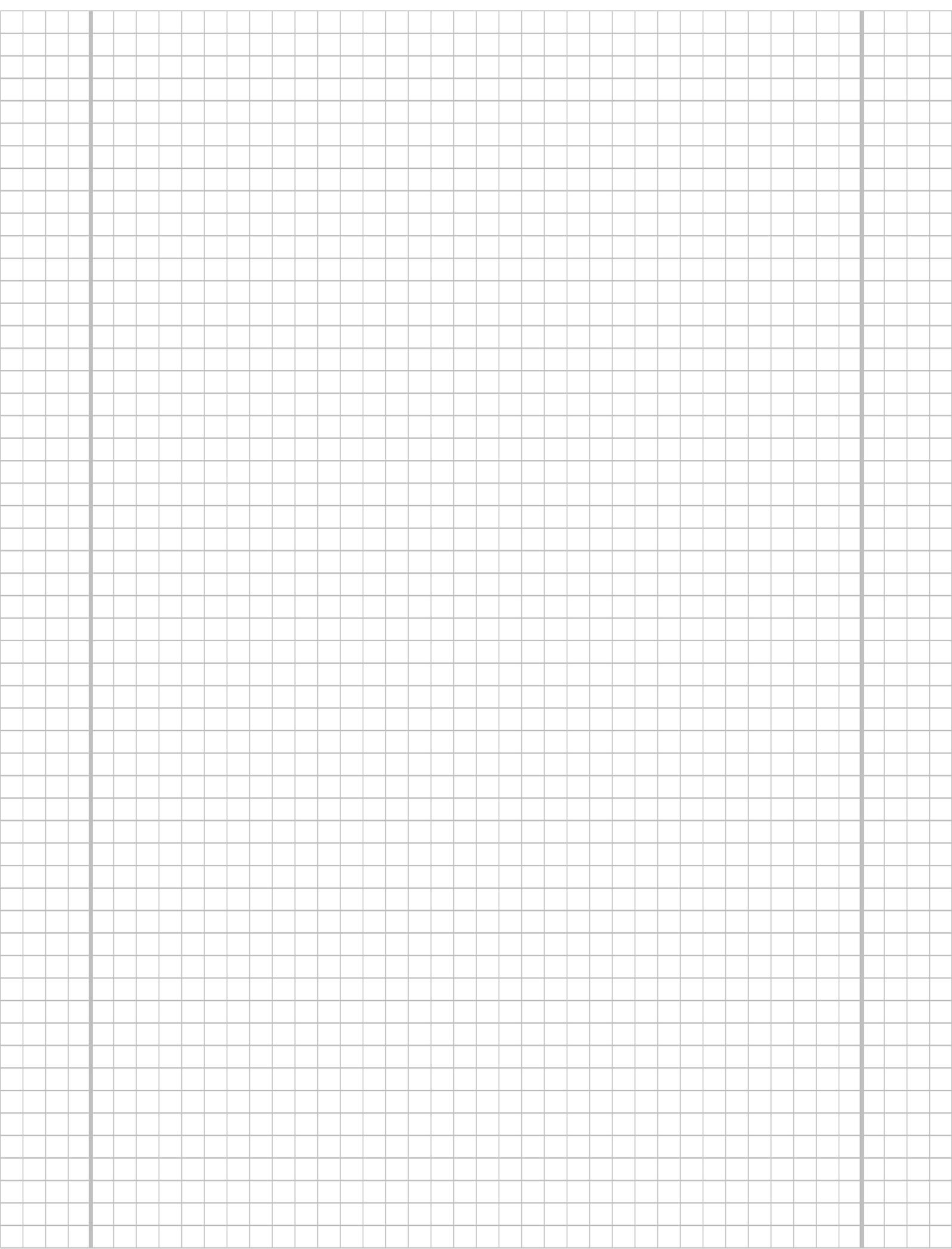
$$K_1 = (5, 35], K_2 = (35, 55], K_3 = (55, 65], K_4 = (65, 75]$$

durch. Geben Sie insbesondere die jeweiligen Klassenbreiten, Klassenmitten, absoluten und relativen Klassenhäufigkeiten, Häufigkeitsdichten sowie die Werte der empirischen Verteilungsfunktion an den Klassengrenzen an.

- (b) Stellen Sie die (approximative) empirische Verteilungsfunktion des Merkmals aus der Klassierung der Daten auf.
- (c) Berechnen Sie aus den klassierten Daten den (approximativen) arithmetischen Mittelwert der Daten. Wie groß ist die relative Abweichung vom tatsächlichen (aus der Urliste bestimmten) Mittelwert von 46.852?
- (d) Bestimmen Sie (unter Verwendung der bekannten Konvention zur eindeutigen Festlegung von Quantilen bei kardinalskalierten Merkmalen) *den* Median sowohl exakt aus der Urliste als auch approximativ mit Hilfe der Verteilungsfunktion für die klassierten Daten.





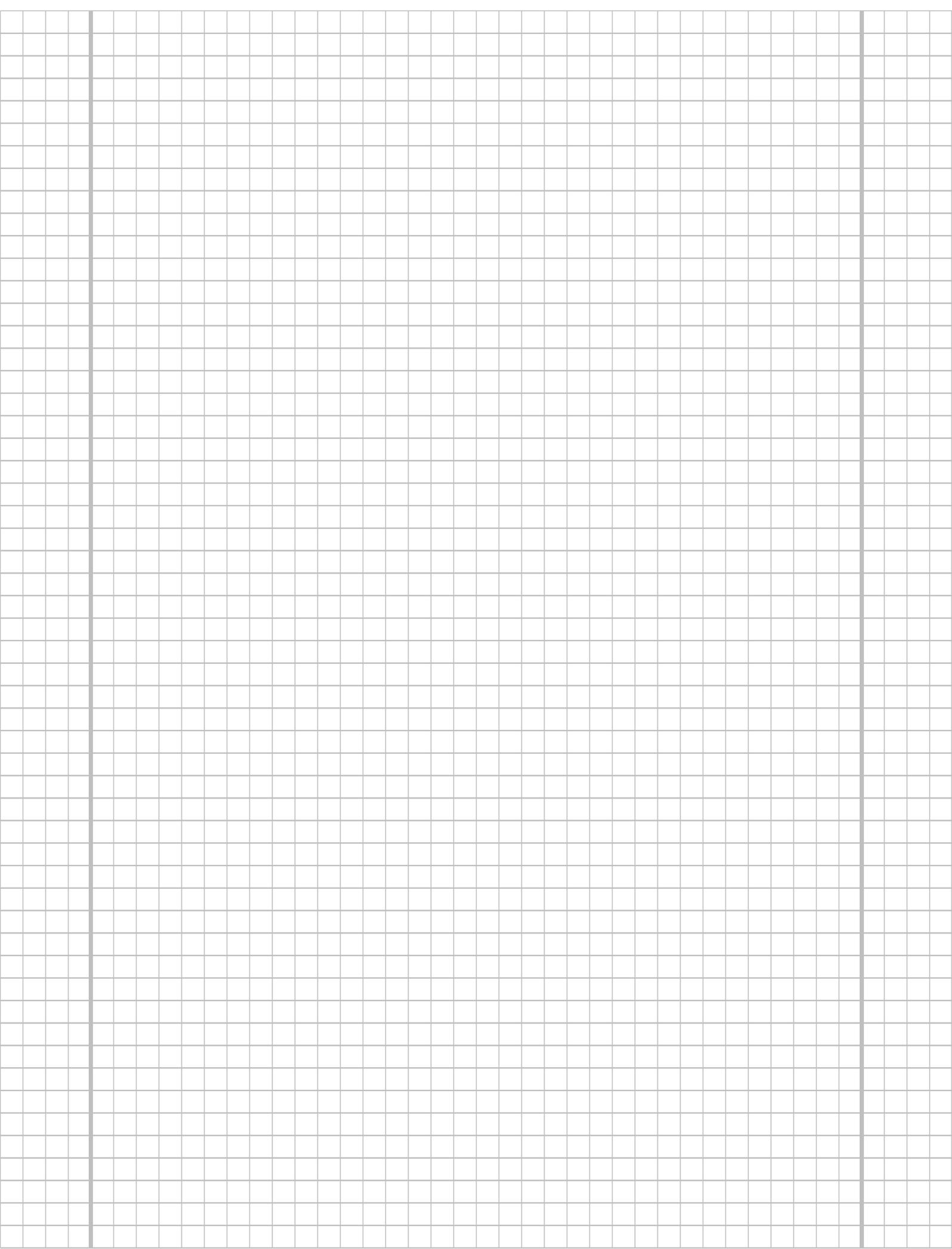


Aufgabe 5 (1 + 2 + 2 = 5 Punkte)

Eine Urne enthält 200 Kugeln, von denen 10 blau und gestreift, 90 rosa und gestreift, 30 blau und kariert sowie 70 rosa und kariert sind. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

- (a) eine rein zufällig aus der Urne entnommene Kugel blau und gestreift ist?
- (b) eine rein zufällig aus der Urne entnommene Kugel rosa ist?
- (c) eine rein zufällig aus der Urne entnommene Kugel kariert ist, wenn man weiß, dass sie rosa ist?

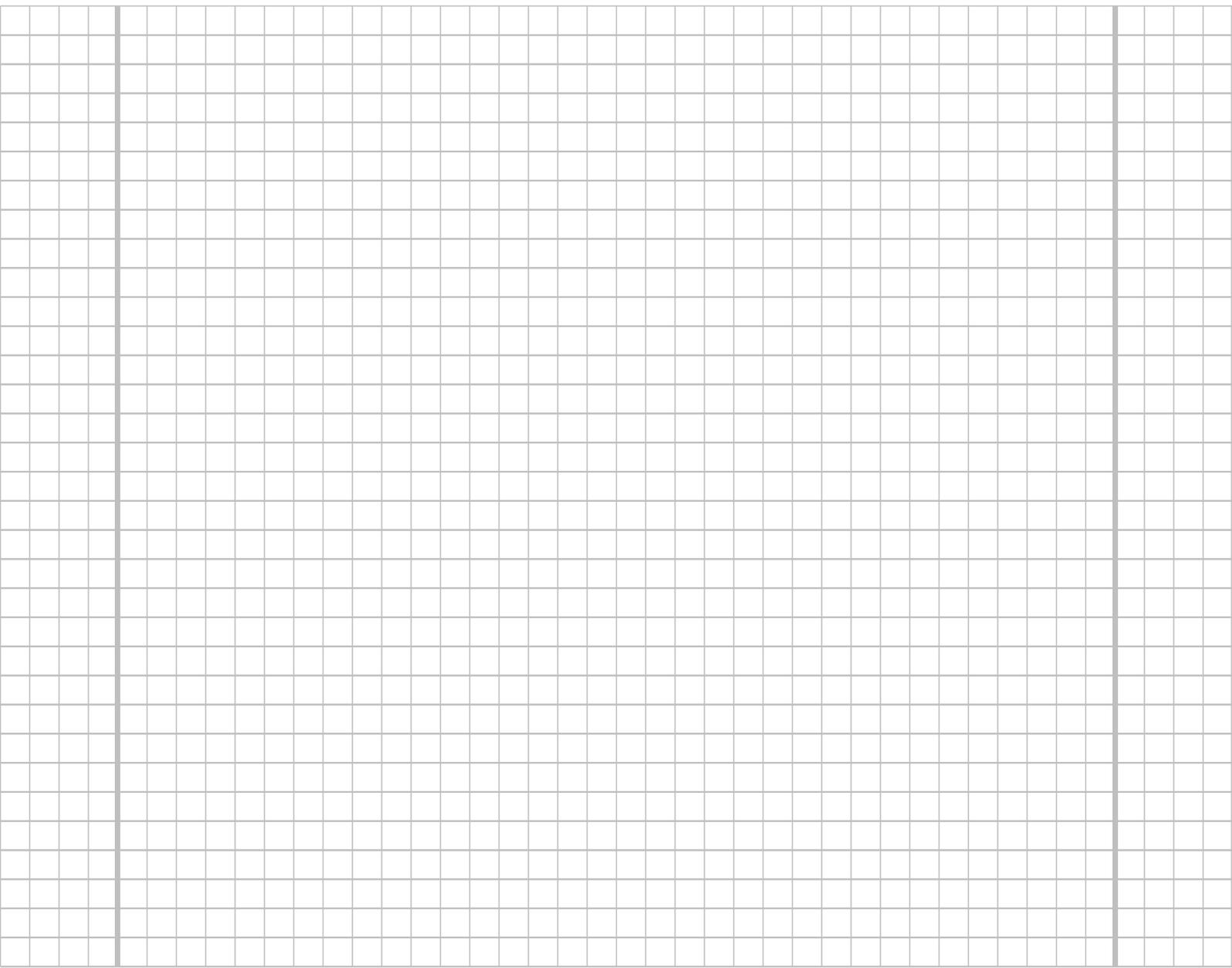


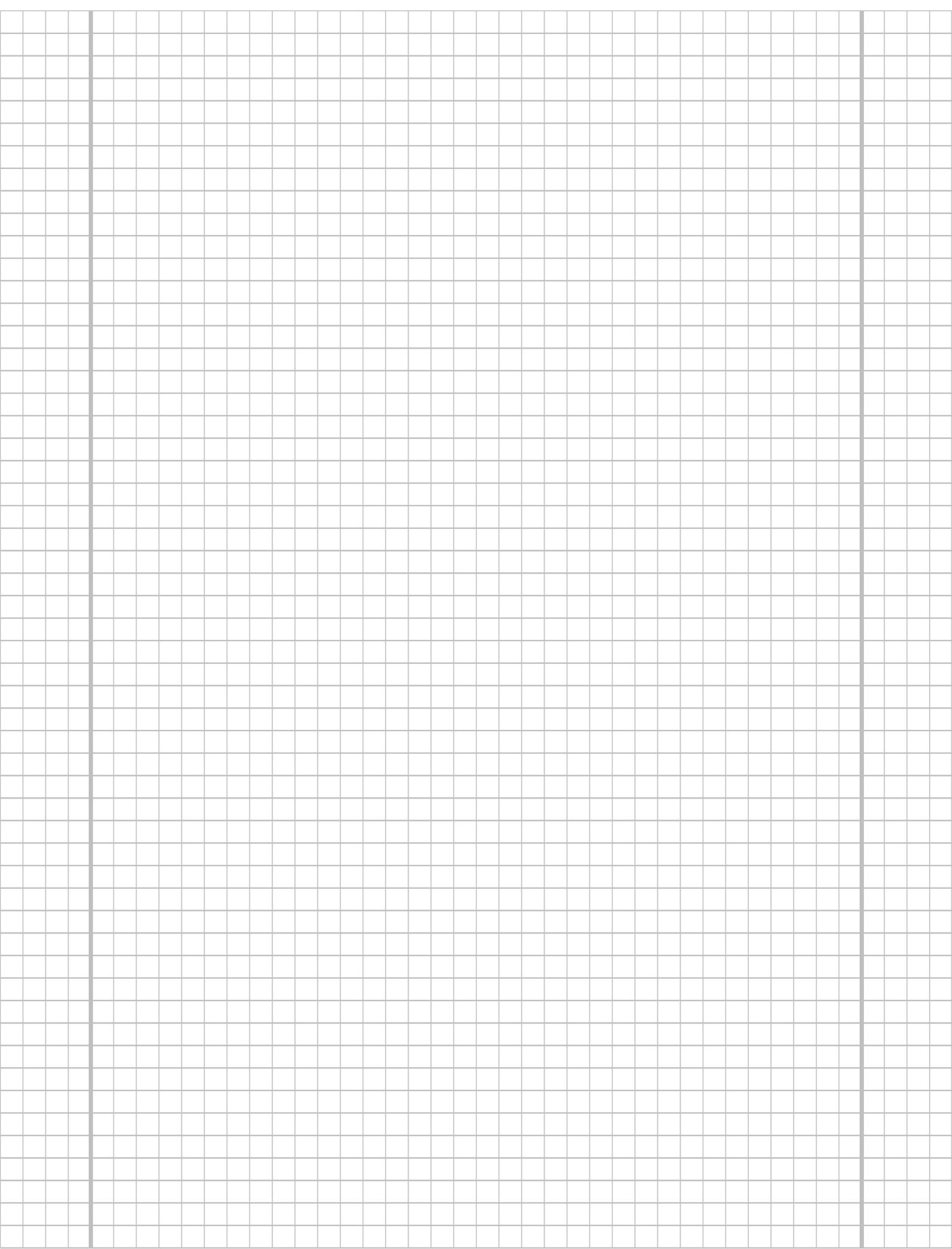


Aufgabe 6 (6 + 2 + 2 = 10 Punkte)

In einer Abteilung einer Finanzbehörde werden eingehende Einkommenssteuererklärungen zufällig auf die Mitarbeiter A, B, C und D aufgeteilt. Aufgrund unterschiedlicher Ausführungsgeschwindigkeiten werden 30% der Erklärungen von Mitarbeiter A, 30% der Erklärungen von Mitarbeiter B, 15% der Erklärungen von Mitarbeiter C und 25% der Erklärungen von Mitarbeiter D bearbeitet. Gegen die ausgestellten Steuerbescheide werden mit einer Wahrscheinlichkeit von 3% bei Mitarbeiter A, 4% bei Mitarbeiter B, 6% bei Mitarbeiter C und 5% bei Mitarbeiter D (erfolgreich) Einsprüche eingelegt.

- (a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass gegen einen zufällig ausgewählten Einkommenssteuerbescheid ein (erfolgreicher) Einspruch eingelegt wird?
- (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein nicht (erfolgreich) per Einspruch beanstandeter Einkommenssteuerbescheid von Mitarbeiter B ausgestellt wurde?
- (c) Sind die Ereignisse „Bescheid wird (erfolgreich) beanstandet“ und „Mitarbeiter B hat den Bescheid erstellt“ stochastisch unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort!





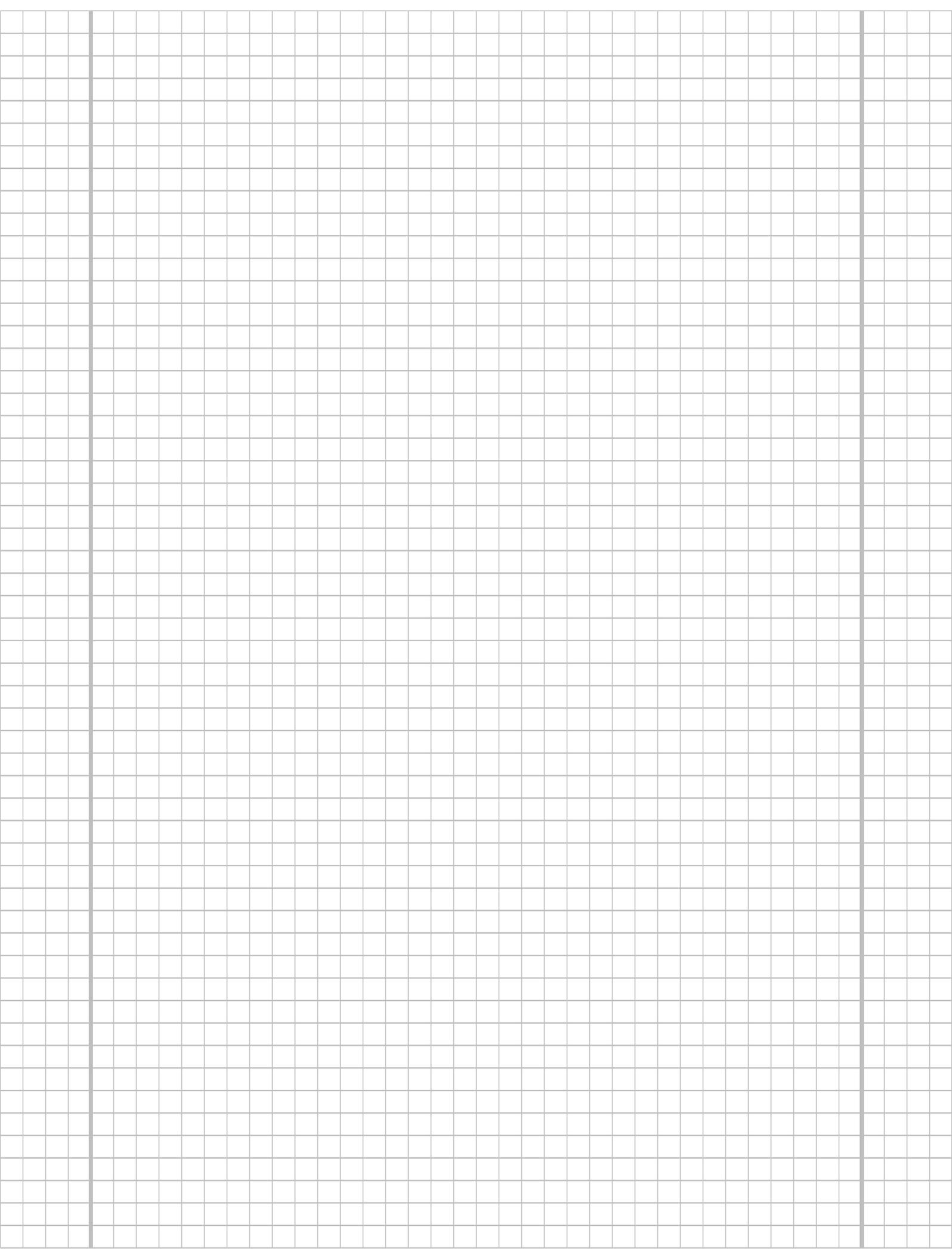
Aufgabe 7 (3 + 2 + 12 + 1 + 4 = 22 Punkte)

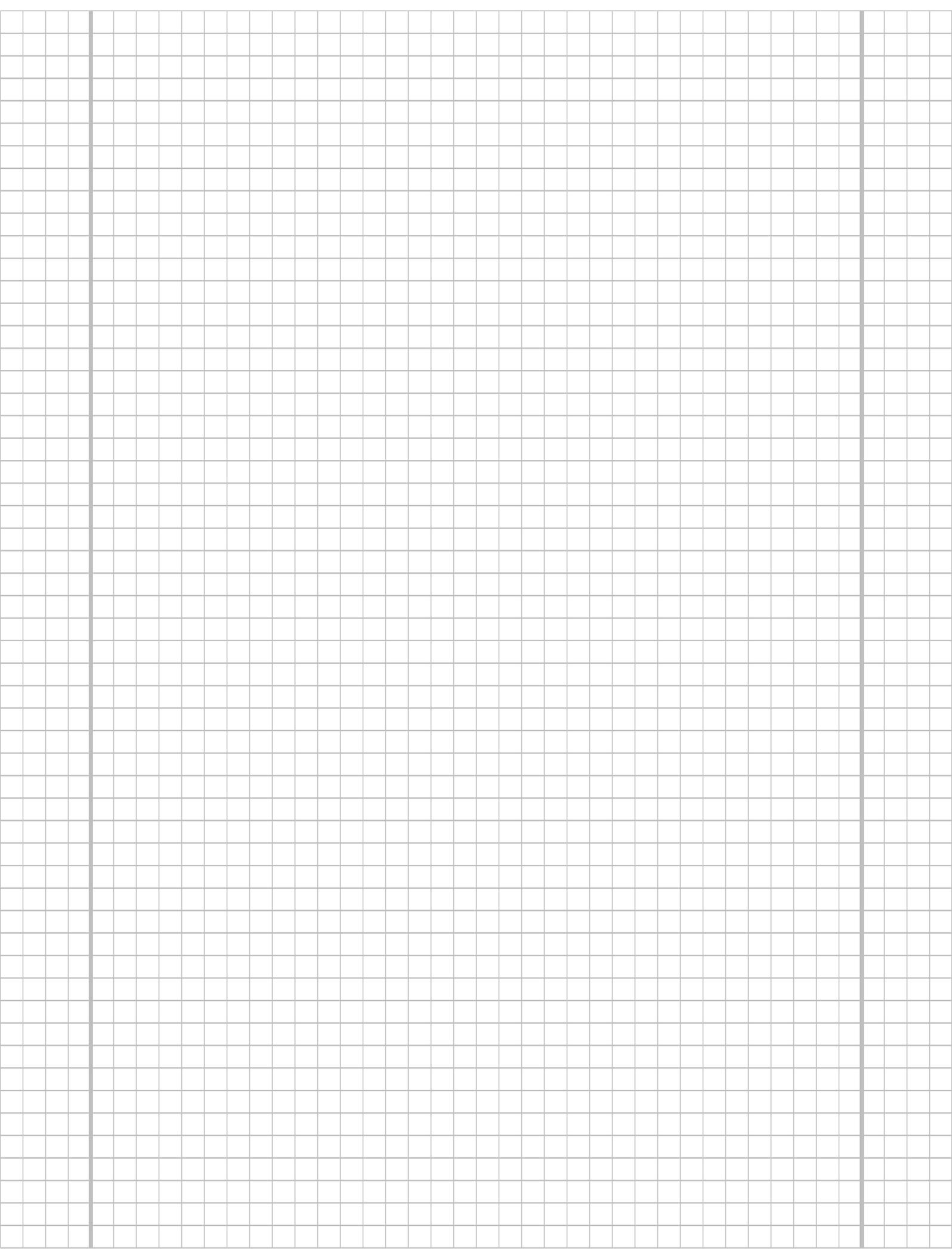
Die Verteilung einer stetigen Zufallsvariablen X sei durch die folgende Verteilungsfunktion gegeben:

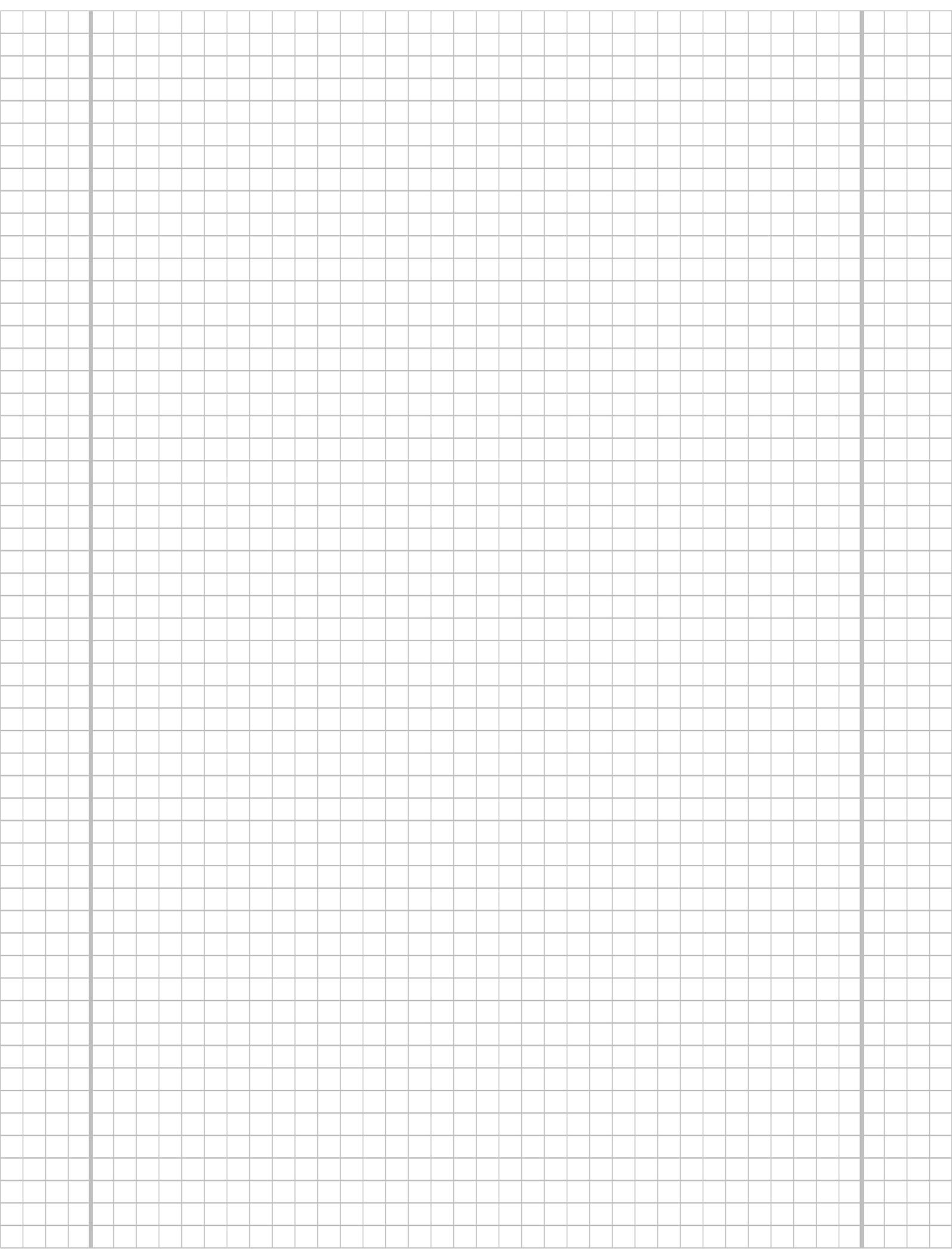
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq -2 \\ -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x & \text{für } -2 < x \leq -1 \\ \frac{3}{16}x^2 + \frac{3}{8}x + \frac{7}{16} & \text{für } -1 < x \leq 1 \\ 1 & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

- (a) Berechnen Sie eine Dichtefunktion f_X von X .
- (b) Berechnen Sie $P(\{X < 0\})$ und $P(\{0 \leq X \leq 1\})$.
- (c) Bestimmen Sie den Erwartungswert $E(X)$ und die Varianz $\text{Var}(X)$.
- (d) Ist X symmetrisch um ihren Erwartungswert verteilt (ohne Begründung)?
- (e) Bestimmen Sie den Median von X .







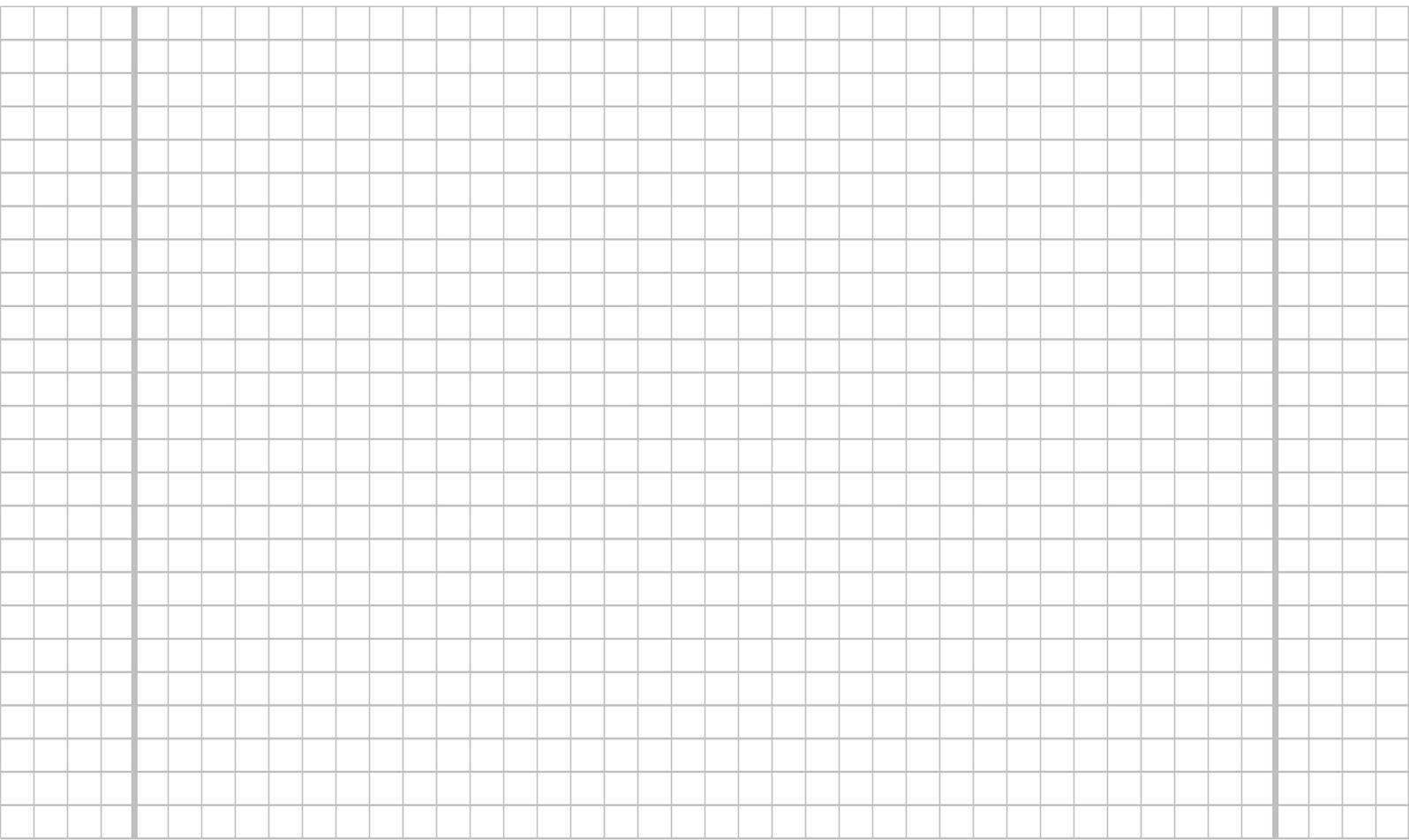


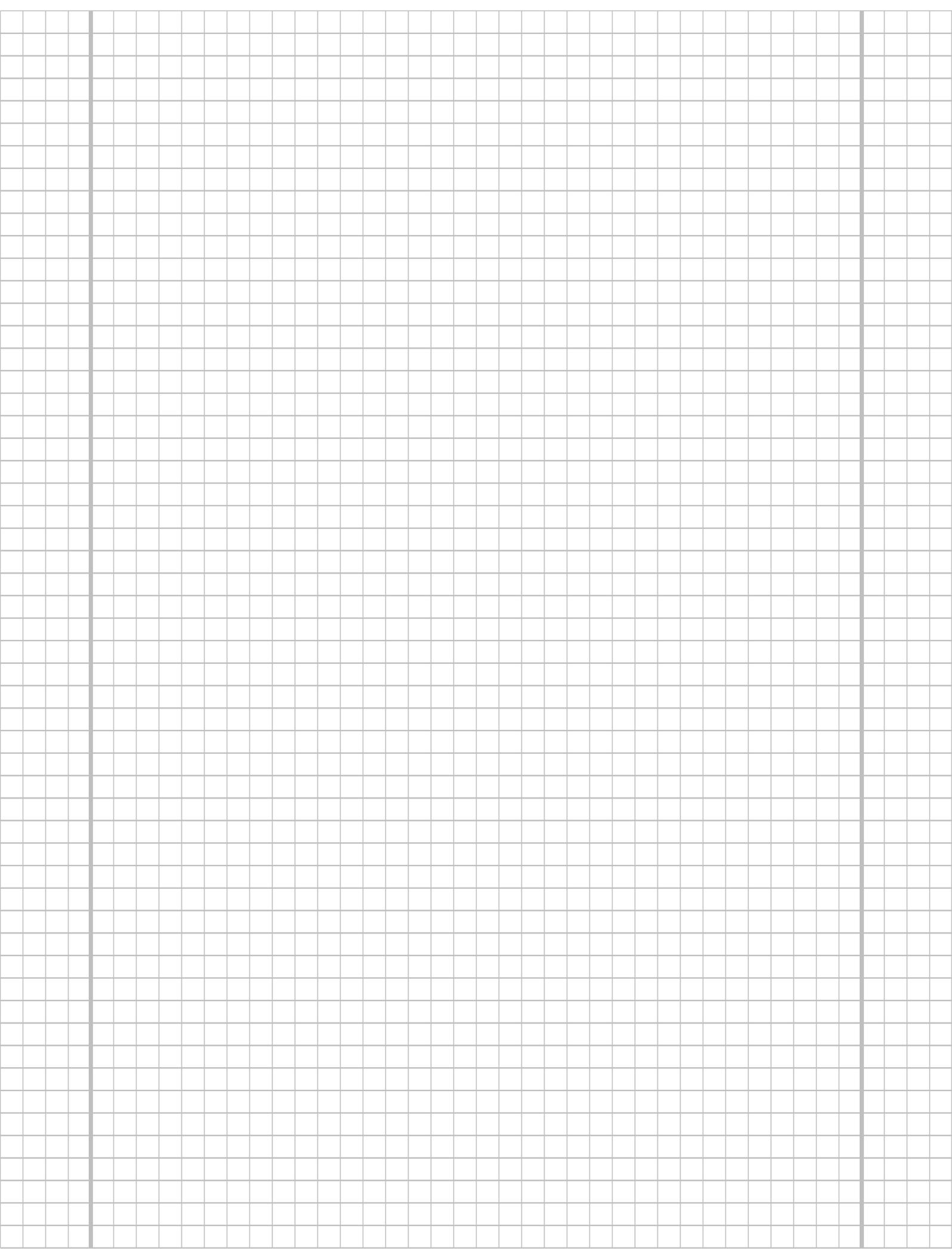
Aufgabe 8 (2 + 9 + 1 + 3 = 15 Punkte)

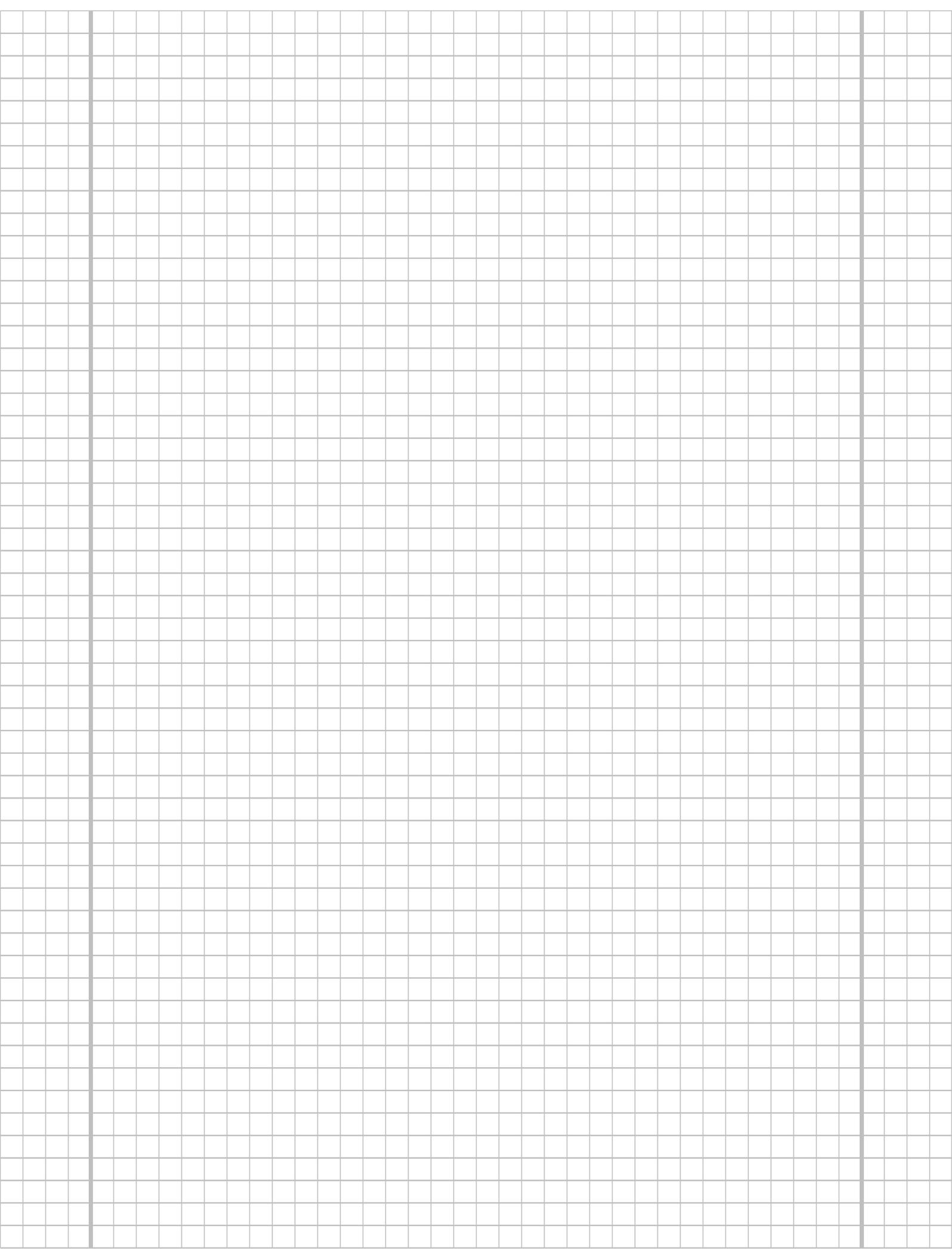
Gegeben sei die folgende Tabelle der gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsverteilung zu einem zweidimensionalen diskreten Zufallsvektor (X, Y) :

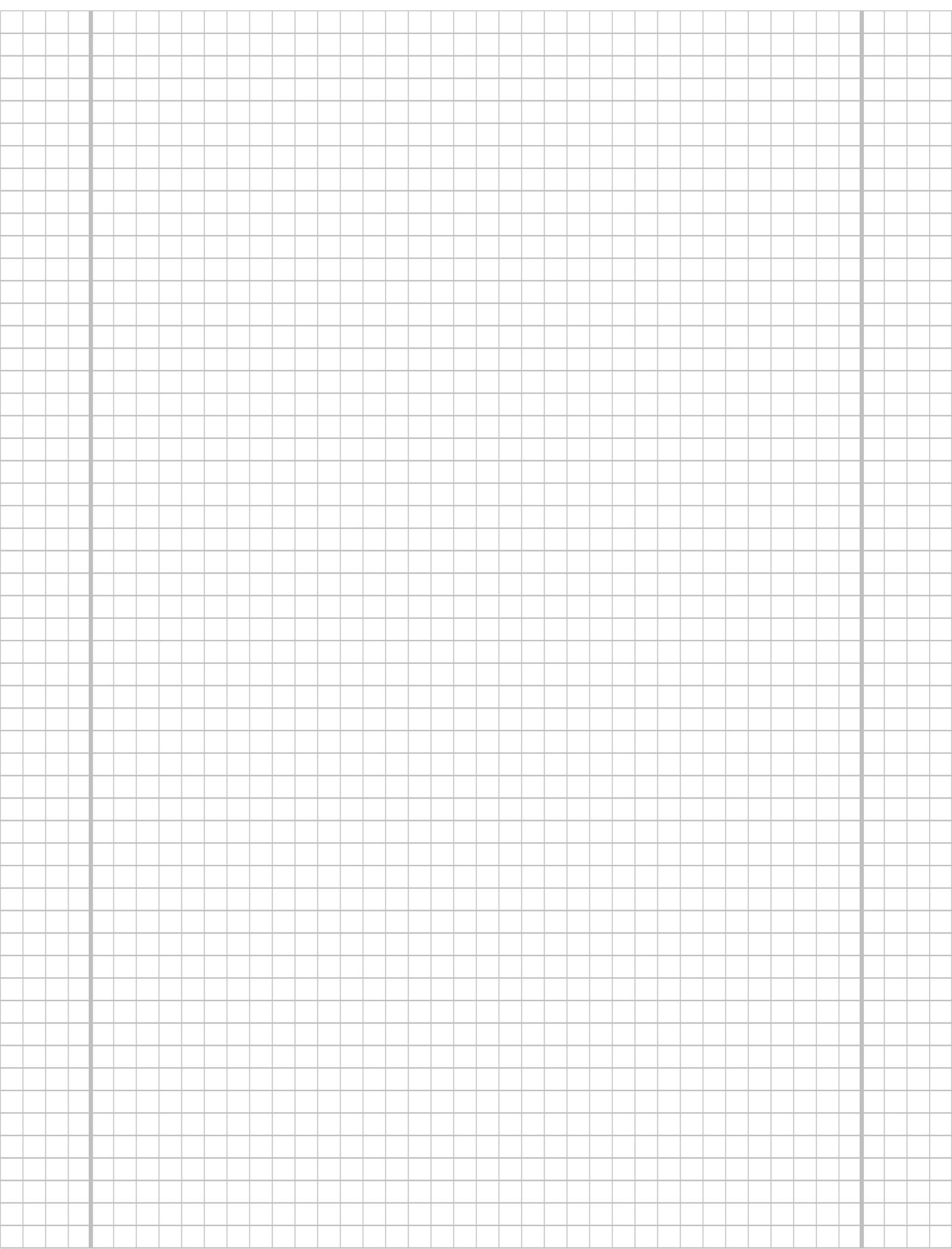
$X \setminus Y$	0	1	2	$p_{i\cdot}$
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	
$p_{\cdot j}$				

- (a) Ergänzen Sie die obige Tabelle (in den vorgesehenen Feldern) um ihre Randverteilungen.
- (b) Berechnen Sie $E(X)$, $E(Y)$, $\text{Var}(X)$, $\text{Var}(Y)$, $\text{Cov}(X, Y)$ sowie $\text{Korr}(X, Y)$.
- (c) Sind X und Y stochastisch unabhängig?
- (d) Berechnen Sie $E(3X - 4Y)$ sowie $\text{Var}(3X - 4Y)$.







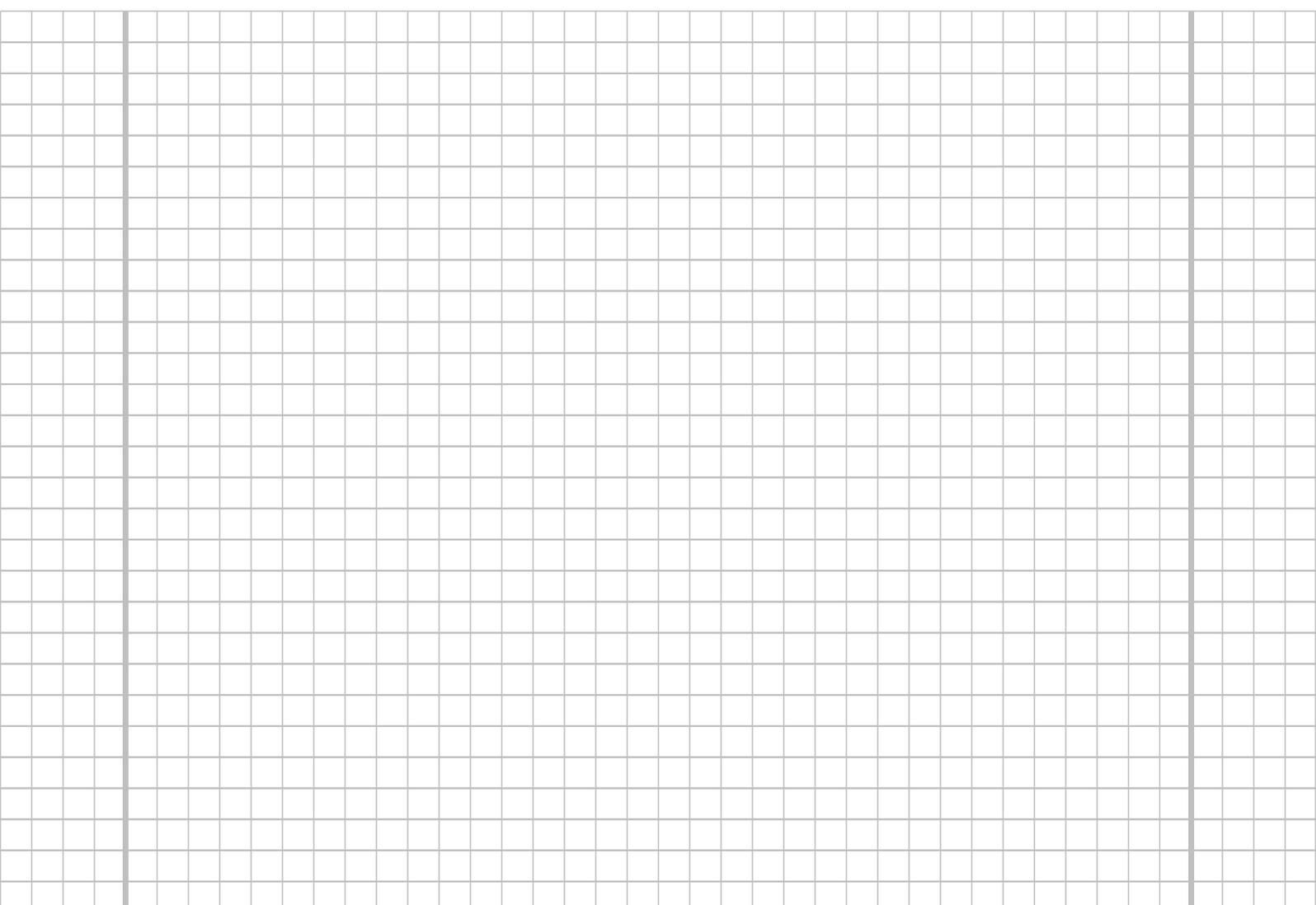


Aufgabe 9 (1 + 4 + 4 = 9 Punkte)

In einem Hotel mit 300 Zimmern können Zimmerreservierungen bis zum Anreisetag kostenlos storniert werden. Man weiß aus Erfahrung, dass im Mittel 13% der reservierten Zimmer tatsächlich kurzfristig storniert werden. Um die Zahl der freien Zimmer möglichst gering zu halten, nimmt das Hotel daher mehr Zimmerreservierungen an als Zimmer im Hotel vorhanden sind.

- (a) Wie ist die Anzahl Y der tatsächlich wegen Reservierungen benötigten (also nicht stornierten) Zimmer verteilt, wenn insgesamt 330 Zimmerreservierungen angenommen wurden und davon ausgegangen werden kann, dass das Stornierungsverhalten der Hotelgäste voneinander unabhängig ist?
- (b) Berechnen Sie unter Verwendung des zentralen Grenzwertsatzes die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei 330 angenommenen Reservierungen genügend Zimmer zur Verfügung stehen, um alle Hotelgäste, die reserviert und nicht storniert haben, auch im Hotel unterzubringen.
- (c) Verwenden Sie den zentralen Grenzwertsatz, um näherungsweise ein 0.9-Quantil der Anzahl in Anspruch genommener Zimmerreservierungen Y zu bestimmen.

Hinweis: Verwenden Sie zur Bearbeitung von Aufgabenteil (b) und (c) die Tabelle zur Standardnormalverteilung auf Seite 24!



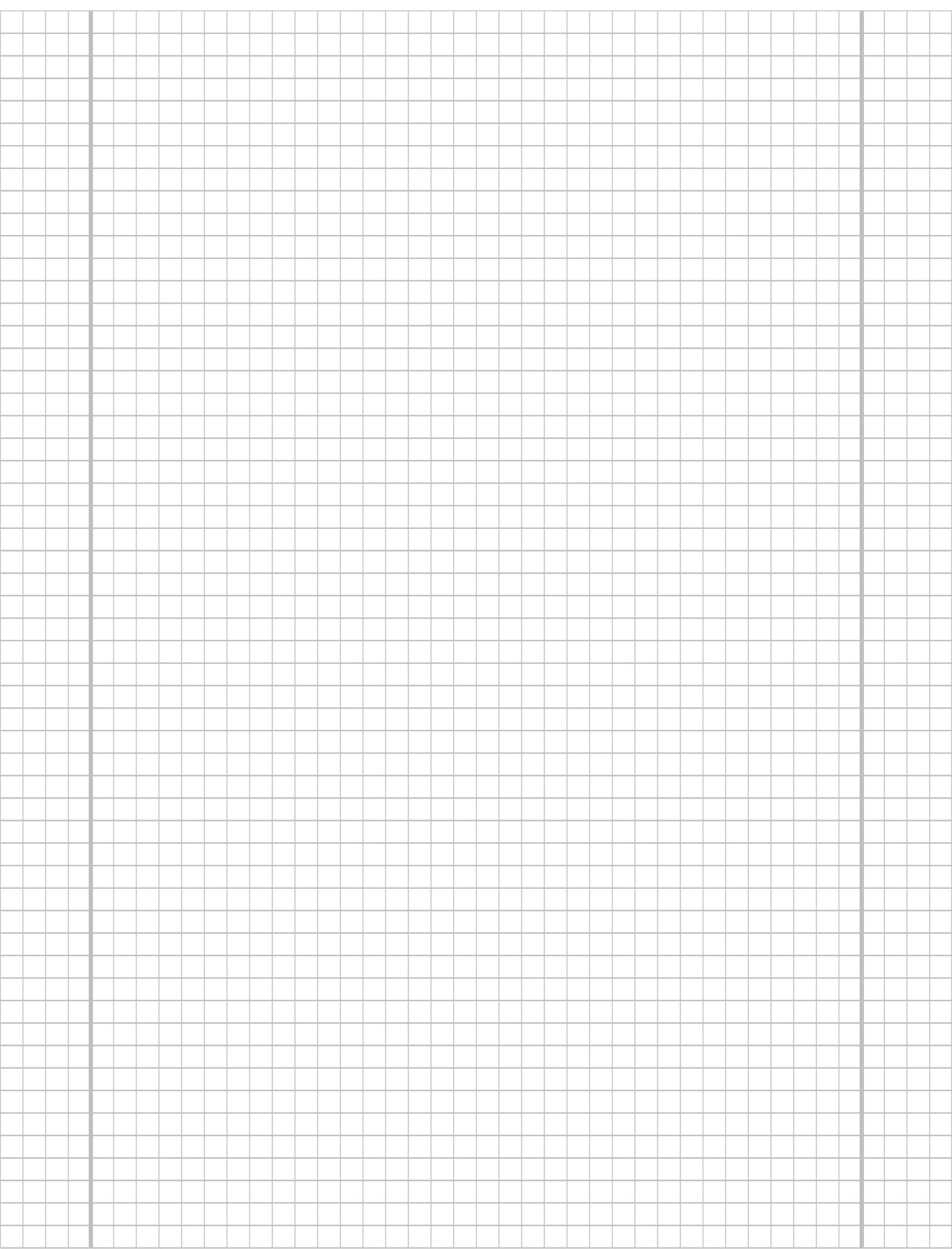


Tabelle zur Standardnormalverteilung

$$F_{N(0,1)}(x) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

$$\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$$

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998