Universität des Saarlandes
Lehrstab Statistik
PD Dr. Martin Becker

2. Zusatzübungsblatt zur Vorlesung
Schließende Statistik WS 2020/21

Aufgabe 1 (7 + 2 + 3 = 12 Punkte)

Bei den Häufigkeitsangaben zu Nebenwirkungen von Arzneimitteln werden 1% bis 10% als „häufig" und mehr als 10% als „sehr häufig" bezeichnet. Bei einem Arzneimittel A wird angegeben, dass häufig Übelkeit auftritt. Die Aufsichtsbehörde möchte in einer Studie mit 121 Personen überprüfen, ob die Angabe „häufig" durch „sehr häufig" ersetzt werden muss, der Anteil des Auftretens von Übelkeit also größer als 10% ist. Bei 19 Personen tritt Übelkeit auf.

(a) Entscheiden Sie zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$, ob der Anteil der Personen mit Übelkeitssymptomen nach der Einnahme von A größer als 10% ist.

(b) Bestimmen Sie den p-Wert für den Test in (a).

(c) Geben Sie zur Sicherheitswahrscheinlichkeit $1-\alpha = 0.95$ das zweiseitige Konfidenzintervall für den Anteil p der Patienten an, bei denen die Einnahme von A Übelkeit auslöst.

Aufgabe 2 (7 Punkte)

In einer Kaffeerösterei füllt eine Maschine Kaffeebohnen in Packungen à 1000 g ab. Die zufällige Füllmenge Y (in g) sei eine normalverteilte Zufallsvariable. Der Kundendienst wird damit beauftragt, bei der routinemäßigen Wartung die Maschine stets so einzustellen, dass für die Varianz der Füllmenge der Maximalwert von $\sigma_0^2 = 25$ $[g^2]$ nicht überschritten wird. Nach der Wartung kamen Zweifel auf, ob die Neueinstellung erfolgreich war. Eine einfache Stichprobe zu Y vom Umfang 25 ergab die Realisation $(x_1, x_2, \ldots, x_{25})$. Aus dieser Realisation wurden bereits die Kennzahlen $\overline{x} = \frac{1}{25}\sum_{i=1}^{25} x_i = 1001.837$ $[g]$, $s^2 = \frac{1}{24}\sum_{i=1}^{25}(x_i - \overline{x})^2 = 39.608$ $[g^2]$ und $\widetilde{s}^2 = \frac{1}{25}\sum_{i=1}^{25}(x_i - 1000)^2 = 41.398$ $[g^2]$ berechnet.
Entscheiden Sie mit einem geeigneten Test zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.01$, ob die Streuung der Abfüllmenge nach der Neueinstellung zu groß ist, *wenn der Erwartungswert der Verteilung der Abfüllmenge als unbekannte Größe angenommen werden soll.* Formulieren Sie das Ergebnis auch in einem Antwortsatz.

Hinweis: Verwenden Sie den folgenden Tabellenausschnitt mit p-Quantilen von $\chi^2(n)$-Verteilungen:

$n \backslash p$	0.01	0.025	0.05	0.50	0.90	0.95	0.975	0.99
21	8.897	10.283	11.591	20.337	29.615	32.671	35.479	38.932
22	9.542	10.982	12.338	21.337	30.813	33.924	36.781	40.289
23	10.196	11.689	13.091	22.337	32.007	35.172	38.076	41.638
24	10.856	12.401	13.848	23.337	33.196	36.415	39.364	42.980
25	11.524	13.120	14.611	24.337	34.382	37.652	40.646	44.314

Aufgabe 3 (13 Punkte)

Mit einem Chi-Quadrat-Anpassungstest soll zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ getestet werden, ob die von einem Zufallszahlengenerator erzeugten Zufallszahlen (wie gewünscht) $N(0,1)$-verteilt sind. Dazu wurden $n = 100$ unabhängige Zufallszahlen generiert und die Verteilung auf einer vorgegebenen Intervalleinteilung wie folgt festgestellt:

i	1	2	3	4	5
K_i	$(-\infty, -1.5]$	$(-1.5, -0.5]$	$(-0.5, 0.5]$	$(0.5, 1.5]$	$(1.5, \infty)$
n_i	7	27	38	18	10

Führen Sie den beschriebenen Test durch. Fassen Sie das Ergebnis auch in einem Antwortsatz zusammen.
Hinweis: Verwenden Sie den folgenden Tabellenausschnitt mit p-Quantilen von $\chi^2(n)$-Verteilungen:

$n \backslash p$	0.01	0.025	0.05	0.50	0.90	0.95	0.975	0.99
1	0.000	0.001	0.004	0.455	2.706	3.841	5.024	6.635
2	0.020	0.051	0.103	1.386	4.605	5.991	7.378	9.210
3	0.115	0.216	0.352	2.366	6.251	7.815	9.348	11.345
4	0.297	0.484	0.711	3.357	7.779	9.488	11.143	13.277
5	0.554	0.831	1.145	4.351	9.236	11.070	12.833	15.086
96	66.730	70.783	74.401	95.334	114.131	119.871	125.000	131.141
97	67.562	71.642	75.282	96.334	115.223	120.990	126.141	132.309
98	68.396	72.501	76.164	97.334	116.315	122.108	127.282	133.476
99	69.230	73.361	77.046	98.334	117.407	123.225	128.422	134.642
100	70.065	74.222	77.929	99.334	118.498	124.342	129.561	135.807

Aufgabe 4 (10 Punkte)

12 vierjährige Jungen und 12 vierjährige Mädchen wurden während zweier jeweils 15-minütiger Spielrunden beobachtet. Die Spielweise jedes Kindes während dieser zwei Perioden wurde bezüglich Aggressionshäufigkeit und -ausmaß mit folgenden Punkten bewertet:

Jungen x_i^A	86	69	72	65	103	70	108	45	111	104	41	50
Mädchen x_i^B	55	40	22	58	16	7	16	26	36	20	9	15

Aus den obigen Daten erhielt man folgende (gerundete) Maßzahlen:

$$\text{Jungen: } \quad \overline{x^A} = 77, \quad s^2_{Y^A} = 630.364; \qquad \text{Mädchen: } \quad \overline{x^B} = 26.667, \quad s^2_{Y^B} = 288.97$$

Es werde angenommen, dass sich die Punktzahlen bei den Jungen durch eine Zufallsvariable Y^A mit $Y^A \sim N(\mu_A, \sigma_A^2)$ und bei den Mädchen durch eine Zufallsvariable Y^B mit $Y^B \sim N(\mu_B, \sigma_B^2)$ beschreiben lassen, Y^A und Y^B stochastisch unabhängig, und die obigen Daten Realisationen von einfachen Stichproben zu Y^A bzw. Y^B sind. Testen Sie unter der Voraussetzung $\sigma_A^2 = \sigma_B^2$ zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ die Hypothese, dass sich im Aggressionsmaß keine geschlechtsspezifischen Unterschiede widerspiegeln, gegen die Alternative, dass sich im Aggressionsmaß geschlechtsspezifische Unterschiede widerspiegeln. Fassen Sie das Ergebnis auch in einem Antwortsatz zusammen.

Aufgabe 5 (14 Punkte)

100 zufällig ausgewählte Studenten einer Universität wurden im Dezember 2008 nach ihrem Studienfach und nach ihrer Einstellung zum neuen Bachelorstudiengang befragt. Dabei ergaben sich die folgenden Häufigkeiten:

Studienrichtung $X\backslash$ Einstellung Y	positiv	negativ	neutral
Naturwissenschaften	20	5	15
Geisteswissenschaften	10	5	5
Wirtschaftswissenschaften	10	20	10

Testen Sie zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$, ob die Studienrichtung und die Einstellung zum Bachelorstudiengang abhängig sind. Fassen Sie das Ergebnis auch in einem Antwortsatz zusammen.

Hinweis: Verwenden Sie den folgenden Tabellenausschnitt mit p-Quantilen von $\chi^2(n)$-Verteilungen:

$n\backslash p$	0.01	0.025	0.05	0.50	0.90	0.95	0.975	0.99
1	0.000	0.001	0.004	0.455	2.706	3.841	5.024	6.635
2	0.020	0.051	0.103	1.386	4.605	5.991	7.378	9.210
3	0.115	0.216	0.352	2.366	6.251	7.815	9.348	11.345
4	0.297	0.484	0.711	3.357	7.779	9.488	11.143	13.277
5	0.554	0.831	1.145	4.351	9.236	11.070	12.833	15.086
6	0.872	1.237	1.635	5.348	10.645	12.592	14.449	16.812
7	1.239	1.690	2.167	6.346	12.017	14.067	16.013	18.475
8	1.646	2.180	2.733	7.344	13.362	15.507	17.535	20.090
9	2.088	2.700	3.325	8.343	14.684	16.919	19.023	21.666
10	2.558	3.247	3.940	9.342	15.987	18.307	20.483	23.209

Aufgabe 6 (12 Punkte)

Im Rahmen einer arbeitspsychologischen Untersuchung waren 2 Bewertungsverfahren A und B für eine bestimmte Arbeitsleistung daraufhin zu prüfen, ob sie sich hinsichtlich ihrer Ergebnisse signifikant unterscheiden. Dazu wurde bei 10 Versuchspersonen die Ausführung einer bestimmten Arbeit jeweils nach jedem der beiden Verfahren bewertet. Dabei erhielt man folgendes Ergebnis:

Versuchsperson i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Punktzahl x_i^A Verf. A	72	70	61	95	53	60	85	67	69	62
Punktzahl x_i^B Verf. B	76	73	70	94	60	58	80	72	73	72

Es werde angenommen, dass die Daten aus einer einfachen Stichprobe zur zweidimensional normalverteilten Grundgesamtheit (Y^A, Y^B) stammen. Testen Sie mit einem Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ die Hypothese, dass das Bewertungsverfahren B durchschnittlich höhere Werte liefert. Fassen Sie das Ergebnis auch in einem Antwortsatz zusammen.

Aufgabe 7 (8 Punkte)

Überprüfen Sie zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.10$, ob die Stichprobenrealisation in Aufgabe 4 darauf hindeutet, dass die dort getroffene Annahme $\sigma_A^2 = \sigma_B^2$ verletzt ist. Fassen Sie das Ergebnis auch in einem Antwortsatz zusammen.
Hinweis: Verwenden Sie den folgenden Tabellenausschnitt mit 0.95-*Quantilen von* $F(m,n)$-*Verteilungen sowie ggf. die Rechenregel* $F_{m,n;p} = \frac{1}{F_{n,m;1-p}}$.

$n\backslash m$	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
5	5.050	4.950	4.876	4.818	4.772	4.735	4.704	4.678	4.655	4.636
6	4.387	4.284	4.207	4.147	4.099	4.060	4.027	4.000	3.976	3.956
7	3.972	3.866	3.787	3.726	3.677	3.637	3.603	3.575	3.550	3.529
8	3.687	3.581	3.500	3.438	3.388	3.347	3.313	3.284	3.259	3.237
9	3.482	3.374	3.293	3.230	3.179	3.137	3.102	3.073	3.048	3.025
10	3.326	3.217	3.135	3.072	3.020	2.978	2.943	2.913	2.887	2.865
11	3.204	3.095	3.012	2.948	2.896	2.854	2.818	2.788	2.761	2.739
12	3.106	2.996	2.913	2.849	2.796	2.753	2.717	2.687	2.660	2.637
13	3.025	2.915	2.832	2.767	2.714	2.671	2.635	2.604	2.577	2.554
14	2.958	2.848	2.764	2.699	2.646	2.602	2.565	2.534	2.507	2.484

Tabelle zur Standardnormalverteilung

$$F_{N(0,1)}(x) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

$$\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$$

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

p-Quantile der Standardnormalverteilung

$$F_{N(0,1)}(N_p) = p$$

p	0.85	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.9995
N_p	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.291

p-Quantile der $t(n)$-Verteilungen $t_{n;p}$

$$T \sim t(n) \quad \Rightarrow \quad F_T(t_{n;p}) = p$$

$n\backslash p$	0.85	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.9995
1	1.963	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	636.619
2	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	31.599
3	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	12.924
4	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	8.610
5	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	6.869
6	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.959
7	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	5.408
8	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	5.041
9	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.781
10	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.587
11	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.437
12	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	4.318
13	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	4.221
14	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	4.140
15	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	4.073
16	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	4.015
17	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.965
18	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.922
19	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.883
20	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.850
21	1.063	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.819
22	1.061	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.792
23	1.060	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.768
24	1.059	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.745
25	1.058	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.725
26	1.058	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.707
27	1.057	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.690
28	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.674
29	1.055	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.659
30	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.646
31	1.054	1.309	1.696	2.040	2.453	2.744	3.633
32	1.054	1.309	1.694	2.037	2.449	2.738	3.622
33	1.053	1.308	1.692	2.035	2.445	2.733	3.611
34	1.052	1.307	1.691	2.032	2.441	2.728	3.601
35	1.052	1.306	1.690	2.030	2.438	2.724	3.591
40	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.551
60	1.045	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.460
80	1.043	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	3.416
100	1.042	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	3.390
120	1.041	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.373
140	1.040	1.288	1.656	1.977	2.353	2.611	3.361
160	1.040	1.287	1.654	1.975	2.350	2.607	3.352
180	1.039	1.286	1.653	1.973	2.347	2.603	3.345
200	1.039	1.286	1.653	1.972	2.345	2.601	3.340
250	1.039	1.285	1.651	1.969	2.341	2.596	3.330