Universität des Saarlandes
Lehrstab Statistik
PD Dr. Martin Becker

6. Übungsblatt zur Vorlesung
Schließende Statistik WS 2020/21

Aufgabe 19

Eine Großbäckerei backt u. a. auch Brötchen und liefert sie an die Lebensmitteleinzelhändler mit dem Hinweis aus, dass das Gewicht Y eines Brötchens durchschnittlich mindestens 50 [g] betrage. Ein Lebensmittelhändler wog daraufhin 25 Brötchen und erhielt aufgrund der Stichprobenrealisation $(x_1, ..., x_{25})$ vom Umfang $n = 25$ den folgenden durchschnittlichen Wert:

$$\overline{x} = \frac{1}{25} \sum_{i=1}^{25} x_i = 49.4 \text{ [g]}$$

Es werde angenommen, dass das Gewicht Y als eine $N(\mu, 1.5^2)$-verteilte Zufallsvariable angesehen werden kann und $(X_1, ..., X_{25})$ eine einfache Stichprobe zu Y mit der obigen Realisation ist.

(a) Testen Sie zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ die Hypothese, dass die Angabe der Großbäckerei korrekt ist, gegen die Alternative, dass das angegebene Gewicht unterschritten wird. Formulieren Sie das Ergebnis in einem Antwortsatz.

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird man sich bei der Durchführung des in Teil (a) verwendeten Tests für die Korrektheit der von der Großbäckerei angegebenen Schranke für das Mindestgewicht entscheiden, obwohl das tatsächliche Durchschnittsgewicht nur $\mu = 49$ [g] beträgt?

(c) Wie viele Brötchen muss der Lebensmittelhändler in seine Stichprobe aufnehmen, um bei tatsächlichen Durchschnittsgewichten von höchstens 49 [g] die Verletzung der Nullhypothese auch mit mindestens 99% Wahrscheinlichkeit zu erkennen?

Aufgabe 20

Zeigen Sie: Der p-Wert des rechtsseitigen Gauß-Tests auf den Mittelwert bei bekannter Varianz zur realisierten Teststatistik N beträgt $1 - \Phi(N)$.

Aufgabe 21

Eine im Bundestag vertretene politische Partei möchte einige Wochen vor der anstehenden Bundestagswahl mit einem statistischen Test untersuchen, ob der eigene Wähleranteil zur Zeit oberhalb der „kritischen Marke“ von 5% liegt. Aus den Ergebnissen der aktuellen „Sonntagsfrage“ ist ersichtlich, dass von den $n = 1000$ zufällig ausgewählten befragten Personen 61 die betreffende Partei gewählt hätten.

(a) Untersuchen Sie mit einem geeigneten statistischen Test, ob der aktuelle Wähleranteil oberhalb der 5%-Marke liegt. Beschränken Sie dabei die Wahrscheinlichkeit, sich fälschlicherweise für einen Wähleranteil über der 5%-Marke zu entscheiden, auf 10%. Zu welchem Ergebnis kommt der Test?

(b) Wie groß ist der p-Wert zur Stichprobeninformation des in Teil (a) durchgeführten Tests? Wie wäre die Entscheidung bei einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0.05$ ausgefallen?

Aufgabe 22

Ein Hersteller von Spielzeug will ein neues Spielzeugmodell auf den Markt bringen. Zur Kalkulation benötigt er Angaben über den Geldbetrag Y (in Euro), den die Eltern einer bestimmten Käuferschicht in Geschenke für 3 bis 8-jährige Kinder investieren. Eine Stichprobe vom Umfang $n = 14$ ergab folgende Stichprobenwerte:

$$98, 106, 96, 120, 107, 96, 109, 111, 110, 101, 119, 108, 98, 82$$

Es werde angenommen, dass der Geldbetrag Y durch eine $N(\mu, 10^2)$-verteilte Zufallsvariable beschrieben werden kann, und dass die obigen Werte Realisationen einer einfachen Stichprobe zu Y sind. Zu testen ist die Nullhypothese $H_0 : \mu = 100$ gegen die Alternative $H_1 : \mu \neq 100$ zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$.

(a) Berechnen Sie in der angegebenen Situation den realisierten Wert der Teststatistik und den zugehörigen p-Wert.

(b) Entscheiden Sie anhand des p-Wertes über Annahme bzw. Ablehnung von H_0.

(c) Liegt der Wert 100 im (zur oben angegebenen Stichprobenrealisation gehörenden) symmetrischen Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau 0.95 für μ?

Aufgabe 23

Auf einer Straße, die durch ein reines Wohngebiet führt, betrug die durchschnittliche Geschwindigkeit Y der darauf fahrenden PKW 55 km/h. Daraufhin wurden Schilder mit der Aufschrift „Freiwillig Tempo 30 der Kinder wegen“ aufgestellt. Nach einer den Autofahrern zugestandenen Anpassungszeit von vier Wochen wurden bei 121 PKW die gefahrenen Geschwindigkeiten x_i (in km/h) registriert. Man erhielt daraus die folgenden Werte:

$$\overline{x} = \frac{1}{121} \sum_{i=1}^{121} x_i = 52; \quad s^2 = \frac{1}{120} \sum_{i=1}^{121} (x_i - \overline{x})^2 = 100.$$

Es werde angenommen, dass Y als eine normalverteilte Zufallsvariable angesehen werden kann und $(X_1, ..., X_{121})$ eine einfache Stichprobe zu Y mit der Realisation $(x_1, ..., x_{121})$ ist. Testen Sie zum Niveau $\alpha = 0.05$ die Hypothese, dass sich die durchschnittliche Geschwindigkeit verringert hat.