

4. Übungsblatt zur Vorlesung Schließende Statistik WS 2020/21

Aufgabe 11

Sei Y normalverteilt mit unbekanntem Erwartungswert μ und bekannter Varianz σ^2 . Zu Y sei eine einfache Stichprobe X_1, \dots, X_n vom Umfang n gegeben.

- (a) Zeigen Sie: Für die Breite b jedes Konfidenzintervalls für μ zum Konfidenzniveau $1 - \alpha$ gilt in Abhängigkeit von n , σ^2 und α

$$b = \frac{2\sigma N_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}$$

(unabhängig von der Stichprobe X_1, \dots, X_n !).

- (b) Nehmen Sie nun an, dass $\sigma^2 = 3^2$ gilt. Wie groß müssen Sie den Stichprobenumfang n einer statistischen Untersuchung mindestens wählen, wenn die Breite der resultierenden Konfidenzintervalle zum Niveau $1 - \alpha = 0.95$ für μ den Wert $b_0 = 1$ nicht überschreiten soll.

Aufgabe 12

Ein Papierschnidegerät schneidet von einem durchlaufenden Papierband Stücke ab, die eine bestimmte Länge haben sollen. Diese gewünschte Solllänge μ ist stufenlos einstellbar, doch können bei fest gewählter Einstellung zufällige Schwankungen in der Länge der abgeschnittenen Papierstücke auftreten. Aufgrund langjähriger Erfahrung sieht man diese Schwankungen Y als eine $N(\mu, 2.4^2)$ -verteilte Zufallsvariable an. Aus der laufenden Produktion werden zufällig 9 Stücke entnommen und ihre Länge nachgemessen. Dabei ergaben sich folgende Werte:

295.5, 297.44, 294.99, 300.83, 297.79, 295.03, 298.17, 298.77, 298.38

Man nehme an, dass die obigen Werte Realisationen einer einfachen Stichprobe (X_1, \dots, X_9) zur Zufallsvariablen Y sind. Geben Sie die zugehörige Realisation des Konfidenzintervalls für μ zum Konfidenzniveau $1 - \alpha = 0.95$ an.

Aufgabe 13

12 Filialen eines großen Lebensmittelkonzerns hatten folgende tägliche Umsätze (in Tausend €) zu verzeichnen:

32.87, 36.92, 31.82, 43.98, 37.65, 31.9, 38.44, 39.69, 38.88, 34.47, 43.56, 37.95

Es werde angenommen, dass die obigen Umsätze Realisationen einer einfachen Stichprobe (X_1, \dots, X_{12}) zu einer normalverteilten Zufallsvariablen Y sind, deren Erwartungswert und Varianz unbekannt sind. Geben Sie zum Konfidenzniveau $1 - \alpha = 0.99$ ein Konfidenzintervall für den Erwartungswert μ an.

Aufgabe 14

Um den Bekanntheitsgrad eines neu eingeführten Produkts zu untersuchen, befragt ein Marktforschungsinstitut 500 zufällig ausgewählte Personen. Von den 500 befragten gaben 373 Personen an, das Produkt zu kennen. Geben Sie ein (symmetrisches) Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau $1 - \alpha = 0.90$ für den Bekanntheitsgrad (Anteil der Bevölkerung, dem das Produkt bekannt ist) an.

Hinweis: Verwenden Sie den folgenden Ausschnitt aus der Tabelle für gängige Quantile der t -Verteilungen.

$n \setminus p$	0.85	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.9995
499	1.038	1.283	1.648	1.965	2.334	2.586	3.310

Aufgabe 15

Zur Erstellung von Hochrechnungen zu Wahlergebnissen in Form von (symmetrischen) Konfidenzintervallen für den Wähleranteil p einer bestimmten Partei (mit $0 < p < 1$) plant ein Meinungsforschungsinstitut die Durchführung einer Befragung von zufällig ausgewählten Wählern vor Wahllokalen. Dabei soll die Breite des Konfidenzintervalls für den Wähleranteil p zum Konfidenzniveau $1 - \alpha = 0.95$ den Wert 0.02 (also 2 Prozentpunkte) nicht überschreiten.

Hinweis: Verwenden Sie als Näherung der Quantile der t -Verteilung in dieser Aufgabe die entsprechenden Quantile der Standardnormalverteilung!

- Geben Sie die Breite \hat{b} der Konfidenzintervalle zum Niveau $1 - \alpha = 0.95$ für den Wähleranteil p in Abhängigkeit des Stichprobenumfangs sowie des geschätzten Wähleranteils \hat{p} an.
- Welcher Wert von \hat{p} führt in Teil (a) bei festem Stichprobenumfang zur größten Breite des Konfidenzintervalls?
- Wie groß muss (unter Berücksichtigung von Teil (b)) der Stichprobenumfang n mindestens gewählt werden, damit auf jeden Fall garantiert ist, dass die Breite des Konfidenzintervalls den Wert 0.02 nicht überschreitet?
- Angenommen, der aus einer Stichprobe vom in Teil (c) bestimmten Mindestumfang geschätzte Wähleranteil beträgt $\hat{p} = 0.083$. Wie breit ist dann das resultierende Konfidenzintervall zum Niveau $1 - \alpha = 0.95$?