Universität des Saarlandes
Lehrstab Statistik
PD Dr. Martin Becker

3. Übungsblatt zur Vorlesung
Schließende Statistik WS 2020/21

Aufgabe 6

Es werde angenommen, dass die ein bestimmtes Merkmal einer Grundgesamtheit beschreibende Zufallsvariable Y die folgende Dichte — abhängig von einem unbekannten Parameter $\theta \in \mathbb{R}$ — besitze:

$$f_Y(y|\theta) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-(y-\theta)} & \text{falls } y \geq \theta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Eine einfache Stichprobe $(X_1, \ldots, X_n)$ zu Y ergab die Realisation $(x_1, \ldots, x_n)$. Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzwert für θ.

Aufgabe 7

Das Merkmal Y einer Grundgesamtheit sei alternativverteilt mit Parameter $p \in [0, 1]$, d. h. es gelte

y_i	0	1
$p_Y(y_i\|p)$	$1-p$	p

.

$(X_1, \ldots, X_n)$ sei eine einfache Stichprobe vom Umfang n zu Y. Weiterhin sei

$$\widehat{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X}$$

der „übliche" Schätzer für p. Zeigen Sie:

(a) $\widehat{p}$ ist eine erwartungstreue Schätzfunktion für p.

(b) Die Varianz von $\widehat{p}$ lautet $\frac{p(1-p)}{n}$.

(c) $\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n-1}$ ist ein erwartungstreuer Schätzer für die Varianz $\frac{p(1-p)}{n}$ von $\widehat{p}$.

Aufgabe 8

Der Wähleranteil p einer Partei wird von zwei Meinungsforschungsinstituten unabhängig voneinander jeweils durch eine einfache Stichprobe vom Umfang $n_1 = 400$ bzw. $n_2 = 1200$ untersucht. Die Schätzfunktionen für die Wähleranteile in den beiden Stichproben seien (wie üblich) gegeben als die in der jeweiligen Stichprobe beobachteten Anteilswerte und mit $\widehat{p}_1$ bzw. $\widehat{p}_2$ bezeichnet.

(a) Zeigen Sie:

  (i) $\mathrm{Var}(\widehat{p}_1) = 3 \cdot \mathrm{Var}(\widehat{p}_2)$

  (ii) Für jedes $\lambda \in [0, 1]$ ist die (konvex-)kombinierte Schätzfunktion

$$\widehat{p}(\lambda) := \lambda \cdot \widehat{p}_1 + (1-\lambda) \cdot \widehat{p}_2$$

  erwartungstreu für p.

(b) Bestimmen Sie $\lambda^* \in [0,1]$ so, dass $\widehat{p}(\lambda^*)$ effizient ist in der Klasse der Schätzfunktionen $\{\widehat{p}(\lambda) | \lambda \in [0,1]\}$.

Aufgabe 9

Zu einer Grundgesamtheit Y mit $E(Y) = \mu$ und $\mathrm{Var}(Y) = \sigma^2 > 0$ sei zur Schätzung von μ aus einer einfachen Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ vom Umfang $n > 1$ (jeweils) die Schätzfunktion

$$\widetilde{\mu}_n := \frac{1}{2}(X_1 + X_n)$$

definiert, also die Schätzfunktion, die (jeweils) die erste und letzte Beobachtung in der Stichprobe mittelt.

(a) Sind die Schätzfunktionen $\widetilde{\mu}_n$ erwartungstreu für μ? Begründen Sie Ihre Antwort!

(b) Ist die Folge der Schätzfunktionen $\widetilde{\mu}_n$ für μ konsistent im quadratischen Mittel? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 10

Für $\lambda > 0$ sei $Y \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$ (es gilt also insbesondere $\mathrm{E}(Y) = \mathrm{Var}(Y) = \lambda$), $X_1, \ldots, X_n$ sei für $n \in \mathbb{N}$ eine einfache Stichprobe vom Umfang n zu Y.

(a) Zeigen Sie: Die Schätzfunktionen

$$T_n(X_1, \ldots, X_n) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i^2 - X_i\right)$$

sind erwartungstreu für λ^2.

(b) Welche Eigenschaft müssen die Schätzfunktionen T_n aus Teil (a) außerdem erfüllen, um für λ^2 konsistent im quadratischen Mittel zu sein?
(Die Gültigkeit dieser Eigenschaft ist **nicht** *zu überprüfen!)*