

2. Übungsblatt zur Vorlesung  
Schließende Statistik WS 2020/21

Aufgabe 2

Es sei  $Y$  eine mit Parameter  $p$ ,  $0 < p < 1$ , geometrisch verteilte Grundgesamtheit,  $Y$  habe also die Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$p_Y(i|p) = p_Y(i) = \begin{cases} (1-p)^i \cdot p & \text{falls } i \in \{0, 1, 2, \dots\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

- (a) Sei  $X_1, \dots, X_n$  eine einfache Stichprobe vom Umfang  $n$  zu  $Y$  und  $x_1, \dots, x_n$  die Realisation zu  $X_1, \dots, X_n$ . Berechnen Sie (in Abhängigkeit von der Stichprobenrealisation  $x_1, \dots, x_n$ ) den ML-Schätzer für  $p$ .
- (b) Bekanntlich ist die Anzahl der Misserfolge einer Bernoulli-Kette vor dem ersten Erfolg geometrisch verteilt, wobei der Parameter die Erfolgswahrscheinlichkeit des Bernoulli-Experiments ist.

Um die Wahrscheinlichkeit für das Würfeln einer „6“ bei einem bestimmten Würfel zu schätzen, wurde 10-mal solange gewürfelt, bis zum ersten Mal eine „6“ gefallen war, und die Anzahl der vorangegangenen (Fehl-)Würfe notiert. Berechnen Sie aus der so erhaltenen Stichprobenrealisation

$$(x_1, \dots, x_{10}) = (3, 2, 14, 0, 7, 3, 6, 8, 0, 3)$$

mit Hilfe von Teil (a) den ML-Schätzer der Wahrscheinlichkeit, mit dem Würfel eine „6“ zu würfeln.

- (c) Der Erwartungswert einer mit Parameter  $p$  geometrisch verteilten Zufallsvariable ist bekanntlich  $\frac{1-p}{p}$ . Berechnen Sie nun den zur in Teil (b) angegebenen Stichprobenrealisation gehörigen Schätzwert für  $p$  nach der Methode der Momente. In welchem Verhältnis steht der erhaltene Wert zum Ergebnis aus Teil (b)?

Aufgabe 3

Eine Zufallsvariable  $Y$  besitze die folgende Dichtefunktion:

$$f_Y(y|\theta) = \begin{cases} (\theta + 1) \cdot y^\theta & \text{für } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad -1 < \theta < \infty$$

Eine einfache Stichprobe  $(X_1, \dots, X_n)$  zu  $Y$  ergab die Realisation  $(x_1, \dots, x_n)$ .

- (a) Schätzen Sie den unbekannt Parameter  $\theta$  mit Hilfe der Maximum-Likelihood-Methode.
- (b) Zeigen Sie, dass  $E(Y) = \frac{\theta + 1}{\theta + 2}$  gilt.
- (c) Schätzen Sie den unbekannt Parameter  $\theta$  mit Hilfe der Momentenmethode.

- (d) Berechnen Sie die realisierten Schätzer  $\hat{\theta}_{MM}$  nach der Momentenmethode sowie  $\hat{\theta}_{ML}$  nach der ML-Methode zur Stichprobenrealisation

0.6427, 0.7193, 0.8305, 0.9684, 0.5864, 0.9649, 0.9812, 0.871 .

#### Aufgabe 4

Die Verteilung einer Zufallsvariablen  $Y$  sei in Abhängigkeit des unbekanntes Parameters  $a > 0$  durch die folgende Dichtefunktion gegeben:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2ay \cdot e^{-a \cdot y^2} & \text{für } y \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Der Parameter  $a$  soll auf Grundlage einer einfachen Stichprobe  $X_1, \dots, X_n$  vom Umfang  $n$  geschätzt werden.

- (a) Bestimmen Sie den Schätzer  $\hat{a}_{ML}$  nach der Maximum-Likelihood-Methode.
- (b) Man kann zeigen, dass  $E(Y) = \sqrt{\frac{\pi}{4 \cdot a}}$  gilt. Bestimmen Sie damit den Schätzer  $\hat{a}_{MM}$  nach der Methode der Momente.

*Hinweise:*

- Beachten Sie, dass Sie Teil (b) auch ohne die Bearbeitung von Teil (a) lösen können.
- Falls sich der ML-Schätzer als lokale Extremstelle einer differenzierbaren Funktion bestimmen lässt, muss **nicht** überprüft werden (z.B. mit Hilfe der 2. Ableitung), ob tatsächlich eine Maximalstelle vorliegt.

#### Aufgabe 5

Zu der (für ein unbekanntes  $\theta > 0$ ) auf dem Intervall  $[0, 2\theta]$  gleichverteilten Zufallsvariablen  $Y$  liege die Realisation  $(x_1, \dots, x_n)$  einer einfachen Stichprobe  $(X_1, \dots, X_n)$  vom Umfang  $n$  vor. Anhand dieser Stichprobenrealisation soll der unbekanntes Parameter  $\theta$  geschätzt werden.

- (a) Geben Sie den Schätzer  $\hat{\theta}_{MM}$  für  $\theta$  nach der Methode der Momente an.  
*Hinweis: Der Erwartungswert von  $Y$  darf und sollte durch „scharfes Hinsehen“ ohne Rechnung ermittelt werden.*
- (b) Geben Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer  $\hat{\theta}_{ML}$  für den unbekanntes Parameter  $\theta$  an.  
*Hinweis: Eine Dichtefunktion von  $Y$  ist gegeben durch*

$$f_Y(y|\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\theta} & : y \in [0, 2\theta] \\ 0 & : y \notin [0, 2\theta] \end{cases} .$$

- (c) In der obigen Situation liege die konkrete Stichprobenrealisation

$(x_1, \dots, x_6) = (0.1, 1.3, 3.0, 0.6, 0.5, 1.7)$

vor. Berechnen Sie auf der Grundlage dieser Stichprobenrealisation die Schätzwerte  $\hat{\theta}_{MM}$  nach der Momenten- und  $\hat{\theta}_{ML}$  nach der ML-Methode für  $\theta$ . Geben Sie die zugehörigen geschätzten Intervalle  $[0, 2\hat{\theta}_{MM}]$  und  $[0, 2\hat{\theta}_{ML}]$  für den Wertebereich der Gleichverteilung an. Wie beurteilen Sie die Plausibilität des Schätzwertes  $\hat{\theta}_{MM}$  der Momenten-Methode?