

5. Übungsblatt zur Vorlesung
Schließende Statistik WS 2017/18

Aufgabe 16

Um den Bekanntheitsgrad eines neu eingeführten Produkts zu untersuchen, befragt ein Marktforschungsinstitut 500 zufällig ausgewählte Personen. Von den 500 befragten gaben 373 Personen an, das Produkt zu kennen. Geben Sie ein (symmetrisches) Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau $1 - \alpha = 0.90$ für den Bekanntheitsgrad (Anteil der Bevölkerung, dem das Produkt bekannt ist) an.

Hinweis: Verwenden Sie den folgenden Ausschnitt aus der Tabelle für gängige Quantile der t -Verteilungen.

| $n \setminus p$ | 0.85 | 0.90 | 0.95 | 0.975 | 0.99 | 0.995 | 0.9995 |
|-----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|
| 499 | 1.038 | 1.283 | 1.648 | 1.965 | 2.334 | 2.586 | 3.310 |

Aufgabe 17

Zur Erstellung von Hochrechnungen zu Wahlergebnissen in Form von (symmetrischen) Konfidenzintervallen für den Wähleranteil p einer bestimmten Partei (mit $0 < p < 1$) plant ein Meinungsforschungsinstitut die Durchführung einer Befragung von zufällig ausgewählten Wählern vor Wahllokalen. Dabei soll die Breite des Konfidenzintervalls für den Wähleranteil p zum Konfidenzniveau $1 - \alpha = 0.95$ den Wert 0.02 (also 2 Prozentpunkte) nicht überschreiten.

Hinweis: Verwenden Sie als Näherung der Quantile der t -Verteilung in dieser Aufgabe die entsprechenden Quantile der Standardnormalverteilung!

- Geben Sie die Breite \hat{b} der Konfidenzintervalle zum Niveau $1 - \alpha = 0.95$ für den Wähleranteil p in Abhängigkeit des Stichprobenumfangs sowie des geschätzten Wähleranteils \hat{p} an.
- Welcher Wert von \hat{p} führt in Teil (a) bei festem Stichprobenumfang zur größten Breite des Konfidenzintervalls?
- Wie groß muss (unter Berücksichtigung von Teil (b)) der Stichprobenumfang n mindestens gewählt werden, damit auf jeden Fall garantiert ist, dass die Breite des Konfidenzintervalls den Wert 0.02 nicht überschreitet?
- Angenommen, der aus einer Stichprobe vom in Teil (c) bestimmten Mindestumfang geschätzte Wähleranteil beträgt $\hat{p} = 0.083$. Wie breit ist dann das resultierende Konfidenzintervall zum Niveau $1 - \alpha = 0.95$?

Aufgabe 18

Bei der Herstellung von Desinfektionsspray weiß man aus langjähriger Erfahrung, dass die verwendete Abfüllanlage eine Varianz von $2^2 = 4[\text{ml}^2]$ für die abgefüllte Flüssigkeitsmenge hat. Nach einer Inventur hat der Hersteller den Verdacht, dass die Justierung der Abfüllanlage fehlerhaft ist und der tatsächliche Mittelwert der Abfüllmenge von der eingestellten und auf dem Produkt angegebenen Sollmenge von $100[\text{ml}]$ abweicht. Dies soll mit einem statistischen Test überprüft werden. Hierzu werden der Produktion 25 Flaschen entnommen, deren gemessene Füllmengen x_1, \dots, x_{25} als Realisation einer einfachen Stichprobe vom Umfang 25 zur annahmegemäß $N(\mu, 2^2[\text{ml}^2])$ -verteilten Abfüllmenge betrachtet werden kann. Als Stichprobenmittelwert ergibt sich dabei

$$\bar{x} = \frac{1}{25} \sum_{i=1}^{25} x_i = 100.837[\text{ml}] .$$

- (a) Testen Sie zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$, ob der Verdacht der Herstellerfirma bestätigt werden kann. Fassen Sie das Ergebnis des Tests in einem Antwortsatz zusammen.
- (b) Ab welchem Abstand von \bar{x} zu $100[\text{ml}]$ entscheidet der Test aus Teil (a), dass der Verdacht der Herstellerfirma bestätigt wird?
- (c) Stellen Sie die Gütefunktion $G(\mu)$ des Tests auf. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art, falls $\mu = 100.5[\text{ml}]$ beträgt?
- (d) Geben Sie auf Basis der Stichprobenrealisation ein (symmetrisches) Konfidenzintervall für die mittlere Abfüllmenge zur Vertrauenswahrscheinlichkeit $1 - \alpha = 0.99$ an.