Prognoseintervalle für y_0 gegeben x_0

- Intervallprognosen für y_0 zur Vertrauenswahrscheinlichkeit $1-\alpha$ erhält man also analog zu den Intervallprognosen für $\mathrm{E}(y_0)$ in der Form

$$\left[\widehat{y_0} - t_{n-2;1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \widehat{\sigma}_{e_0}\, ,\, \widehat{y_0} + t_{n-2;1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \widehat{\sigma}_{e_0}\right]$$
$$= \left[(\widehat{\beta}_1 + \widehat{\beta}_2 \cdot x_0) - t_{n-2;1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \widehat{\sigma}_{e_0}\, ,\, (\widehat{\beta}_1 + \widehat{\beta}_2 \cdot x_0) + t_{n-2;1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \widehat{\sigma}_{e_0}\right] \; .$$

- Im Beispiel (Ausgaben in Abhängigkeit vom Einkommen) erhält man zu gegebenem $x_0 = 38$ (in 100 €)

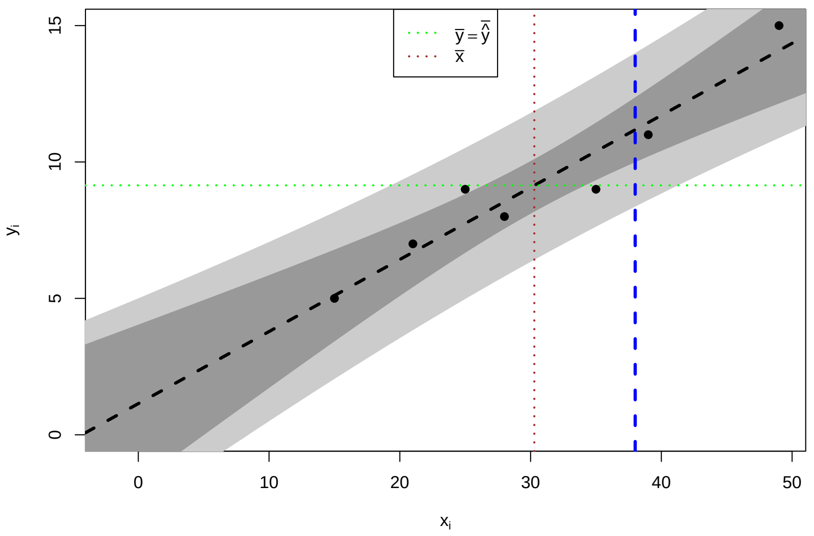
$$\widehat{\sigma^2}_{e_0} = \widehat{\sigma^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \overline{x})^2}{n \cdot s_X^2}\right) = 0.9856 \cdot \left(1 + \frac{1}{7} + \frac{(38 - 30.28571)^2}{7 \cdot 114.4901}\right) = 1.1996$$

mit der bereits berechneten Punktprognose $\widehat{y_0} = \widehat{\mathrm{E}(y_0)} = 11.1807$ (in 100 €) die zugehörige Intervallprognose für y_0 zur Vertrauenswahrscheinlichkeit 0.95

$$\left[11.1807 - 2.571 \cdot \sqrt{1.1996}\, ,\, 11.1807 + 2.571 \cdot \sqrt{1.1996}\right]$$
$$= [8.3648\, ,\, 13.9966] \;\; \text{(in 100 €)} \; .$$

Prognose: Ausgaben in Abhängigkeit vom Einkommen

$\widehat{\beta}_1 = 1.14228$, $\widehat{\beta}_2 = 0.26417$, $x_0 = 38$, $\widehat{y_0} = 11.1807$, $1-\alpha = 0.95$



Lineare Modelle mit Statistik-Software **R**

Beispiel (Ausgaben in Abhängigkeit vom Einkommen)

- Modellschätzung mit aussagekräftiger Zusammenfassung in nur einer Zeile:

```
> summary(lm(y~x))
Call:
lm(formula = y ~ x)

Residuals:
      1       2       3       4       5       6       7
-1.3882  0.9134  0.3102 -0.4449 -0.1048 -0.5390  1.2535

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  1.14225    1.12645   1.014 0.357100
x            0.26417    0.03507   7.533 0.000653 ***
---
Signif. codes:
0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.9928 on 5 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.919,       Adjusted R-squared:  0.9028
F-statistic: 56.74 on 1 and 5 DF,  p-value: 0.0006529
```


Interpretation des Outputs (I)

Residuen, $\widehat{\sigma^2}$ und R^2

```
Residuals:
      1       2       3       4       5       6       7
-1.3882  0.9134  0.3102 -0.4449 -0.1048 -0.5390  1.2535

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  1.14225    1.12645   1.014 0.357100
x            0.26417    0.03507   7.533 0.000653 ***
--
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.9928 on 5 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.919, Adjusted R-squared:  0.9028
F-statistic: 56.74 on 1 and 5 DF,  p-value: 0.0006529
```

- Auflistung bzw. Zusammenfassung der Residuen $\widehat{u}_i$
- Geschätzte Standardabweichung $\widehat{\sigma} = \sqrt{\widehat{\sigma^2}}$, hier: $\widehat{\sigma} = 0.9928 \Rightarrow \widehat{\sigma^2} = 0.9857$
- Anzahl Freiheitsgrade $n-2$, hier: $n-2 = 5 \Rightarrow n = 7$
- (Multiples) Bestimmtheitsmaß R^2, hier: $R^2 = 0.919$

Interpretation des Outputs (II)

Ergebnisse zur Schätzung von β_1 und β_2

```
Residuals:
      1       2       3       4       5       6       7
-1.3882  0.9134  0.3102 -0.4449 -0.1048 -0.5390  1.2535

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  1.14225    1.12645   1.014 0.357100
x            0.26417    0.03507   7.533 0.000653 ***
--
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.9928 on 5 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.919, Adjusted R-squared:  0.9028
F-statistic: 56.74 on 1 and 5 DF,  p-value: 0.0006529
```

- Realisationen von $\widehat{\beta}_1$, $\widehat{\beta}_2$, hier: $\widehat{\beta}_1 = 1.14225$, $\widehat{\beta}_2 = 0.26417$
- Standardfehler von $\widehat{\beta}_1$, $\widehat{\beta}_2$, hier: $\widehat{\sigma}_{\widehat{\beta}_1} = 1.12645$, $\widehat{\sigma}_{\widehat{\beta}_2} = 0.03507$
- t-Statistiken zu Tests auf Signifikanz, hier: zu $\beta_1 : t = 1.014$, zu $\beta_2 : t = 7.533$
- p-Werte zu Tests auf Signifikanz, hier: zu $\beta_1 : p = 0.3571$, zu $\beta_2 : p = 0.000653$

Zusammenhang zwischen p-Werten

zu zweiseitigen und einseitigen Tests bei unter H_0 (um Null) symmetrisch verteilter Teststatistik

- Erinnerung: $t(n)$- sowie $N(0,1)$-Verteilung sind symmetrisch um Null, für die zugehörigen Verteilungsfunktionen F gilt also $F(x) = 1 - F(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $F(0) = 0.5$, $F(x) < 0.5$ für $x < 0$ sowie $F(x) > 0.5$ für $x > 0$.
- Für die p-Werte p_z der zweiseitigen Tests auf den Mittelwert bei bekannter (Gauß-Test) sowie unbekannter (t-Test) Varianz gilt daher bekanntlich
$$p_z = 2 \cdot \min\{F(x), 1 - F(x)\} = \begin{cases} 2 \cdot F(x) & \text{falls } x < 0 \\ 2 \cdot (1 - F(x)) & \text{falls } x \geq 0 \end{cases},$$
wobei x den realisierten Wert der Teststatistik sowie F die Verteilungsfunktion der Teststatistik unter H_0 bezeichne.
- Für die p-Werte $p_l = F(x)$ zum linksseitigen sowie $p_r = 1 - F(x)$ zum rechtsseitigen Test bei realisierter Teststatistik x gelten demnach die folgenden Zusammenhänge:
$$p_l = \begin{cases} \frac{p_z}{2} & \text{falls } x < 0 \\ 1 - \frac{p_z}{2} & \text{falls } x \geq 0 \end{cases} \qquad \text{sowie} \qquad p_r = \begin{cases} 1 - \frac{p_z}{2} & \text{falls } x < 0 \\ \frac{p_z}{2} & \text{falls } x \geq 0 \end{cases}.$$
- Somit auch p-Werte zu einseitigen Tests aus **R**-Output bestimmbar!

Verallgemeinerungen des einfachen linearen Modells

- Zahlreiche Verallgemeinerungen des einfachen linearen Modells möglich.
- Statt einem Regressor mehrere Regressoren $\rightsquigarrow$ multiples Regressionsmodell.
- Statt unabhängiger identisch verteilter Störgrößen (z.B.)
  - unabhängige Störgrößen mit unterschiedlichen Varianzen,
  - abhängige (korrelierte) Störgrößen.
- Statt deterministischer Regressoren stochastische Regressoren.
- Statt nur einer Gleichung für einen Regressanden (simultane) Betrachtung mehrerer Regressanden $\rightsquigarrow$ Mehrgleichungsmodelle.
- Über Betrachtung linearer Abhängigkeiten hinaus auch nichtlineare Regressionsmodelle möglich.
- Verallgemeinerungen werden in weiterführenden Vorlesungen diskutiert, insbesondere „Ökonometrie“ (Bachelorstudiengang) und „Econometric Methods and Applications“ (Masterstudiengang Economics, Finance, and Philosophy).