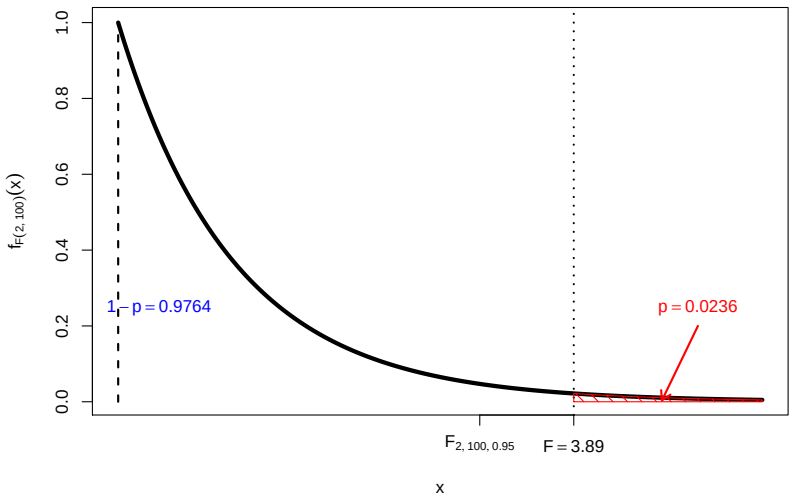
Beispiel: p-Wert bei Varianzanalyse (Grafik)

Bedienungszeiten-Beispiel, realisierte Teststatistik $F = 3.89$, p-Wert: 0.0236



Varianzanalyse und 2-Stichproben-t-Test

- Varianzanalyse zwar für $k > 2$ unabhängige Stichproben eingeführt, Anwendung aber auch für $k = 2$ möglich.
- Nach Zuordnung der beteiligten Größen in den unterschiedlichen Notationen ($\mu_A \equiv \mu_1$, $\mu_B \equiv \mu_2$, $X_i^A \equiv X_{1,i}$, $X_i^B \equiv X_{2,i}$, $n_A \equiv n_1$, $n_B \equiv n_2$, $n = n_A + n_B$) enger Zusammenhang zum 2-Stichproben-t-Test erkennbar:
  - Fragestellungen (Hypothesenpaare) und Anwendungsvoraussetzungen identisch mit denen des zweiseitigen 2-Stichproben-t-Tests für den Mittelwertvergleich bei unbekannten, aber übereinstimmenden Varianzen.
  - Man kann zeigen: Für Teststatistik F der Varianzanalyse im Fall $k = 2$ und Teststatistik t des 2-Stichproben-t-Tests gilt $F = t^2$.
  - Es gilt außerdem zwischen Quantilen der $F(1, n)$ und der $t(n)$-Verteilung der Zusammenhang $F_{1,n;1-\alpha} = t^2_{n;1-\frac{\alpha}{2}}$. Damit:

$$x \in (-\infty, -t_{n;1-\frac{\alpha}{2}}) \cup (t_{n;1-\frac{\alpha}{2}}, \infty) \iff x^2 \in (F_{1,n;1-\alpha}, \infty)$$

- Insgesamt sind damit die Varianzanalyse mit $k = 2$ Faktorstufen und der zweiseitige 2-Stichproben-t-Test für den Mittelwertvergleich bei unbekannten, aber übereinstimmenden Varianzen also äquivalent in dem Sinn, dass Sie stets übereinstimmende Testentscheidungen liefern!

Deskriptive Beschreibung linearer Zusammenhänge

- Aus deskriptiver Statistik bekannt: Pearsonscher Korrelationskoeffizient als Maß der Stärke des *linearen* Zusammenhangs zwischen zwei (kardinalskalierten) Merkmalen X und Y.
- *Nun:* Ausführlichere Betrachtung linearer Zusammenhänge zwischen Merkmalen (zunächst rein deskriptiv!):
  Liegt ein linearer Zusammenhang zwischen zwei Merkmalen X und Y nahe, ist nicht nur die Stärke dieses Zusammenhangs interessant, sondern auch die genauere „Form“ des Zusammenhangs.
- „Form“ linearer Zusammenhänge kann durch Geraden(gleichungen) spezifiziert werden.
- *Problemstellung:* Wie kann zu einer Urliste $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ der Länge n zu (X, Y) eine sog. **Regressiongerade** (auch: Ausgleichsgerade) gefunden werden, die den linearen Zusammenhang zwischen X und Y „möglichst gut“ widerspiegelt?
- *Wichtig:* Was soll „möglichst gut“ überhaupt bedeuten?
  Hier: Summe der quadrierten Abstände von der Geraden zu den Datenpunkten (x_i, y_i) in **vertikaler** Richtung soll möglichst gering sein.
  (Begründung für Verwendung dieses „Qualitätskriteriums“ wird nachgeliefert!)

- Geraden (eindeutig) bestimmt (zum Beispiel) durch Absolutglied a und Steigung b in der bekannten Darstellung

$$y = f_{a,b}(x) := a + b \cdot x \ .$$

- Für den i-ten Datenpunkt (x_i, y_i) erhält man damit den vertikalen Abstand

$$u_i(a, b) := y_i - f_{a,b}(x_i) = y_i - (a + b \cdot x_i)$$

von der Geraden mit Absolutglied a und Steigung b.

- Gesucht werden a und b so, dass die Summe der quadrierten vertikalen Abstände der „Punktwolke“ (x_i, y_i) von der durch a und b festgelegten Geraden,

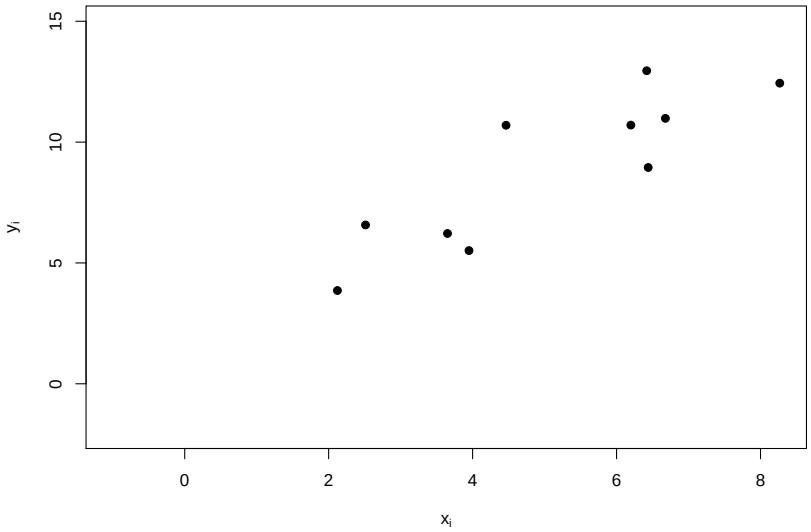
$$\sum_{i=1}^{n} (u_i(a, b))^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - f_{a,b}(x_i))^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (a + b \cdot x_i))^2 \ ,$$

möglichst klein wird.

- Verwendung dieses Kriteriums heißt auch **Methode der kleinsten Quadrate (KQ-Methode)** oder **Least-Squares-Methode (LS-Methode)**.

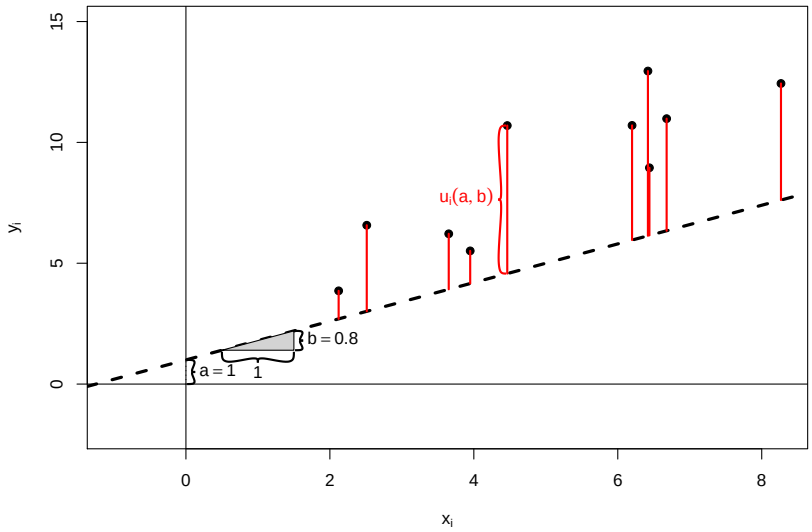
Beispiel: „Punktwolke“

aus $n = 10$ Paaren (x_i, y_i)



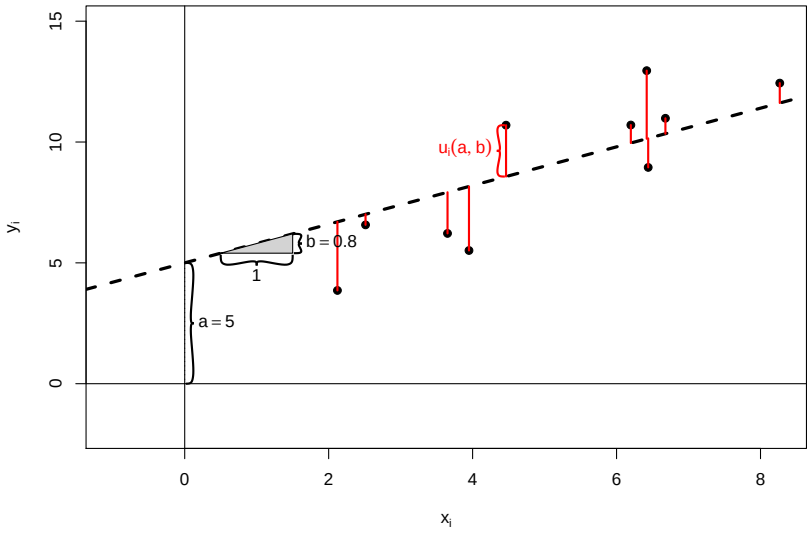
Beispiel: „Punktwolke“ und verschiedene Geraden (I)

$a = 1$, $b = 0.8$, $\sum_{i=1}^{n}(u_i(a,b))^2 = 180.32$



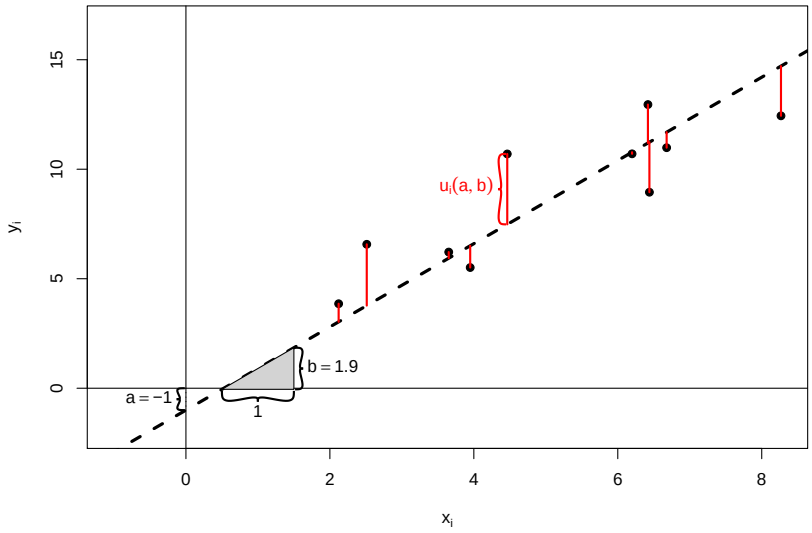
Beispiel: „Punktwolke“ und verschiedene Geraden (II)

$a = 5$, $b = 0.8$, $\sum_{i=1}^{n}(u_i(a,b))^2 = 33.71$



Beispiel: „Punktwolke“ und verschiedene Geraden (III)

$a = -1$, $b = 1.9$, $\sum_{i=1}^{n}(u_i(a,b))^2 = 33.89$



Rechnerische Bestimmung der Regressionsgeraden (I)

- Gesucht sind also $\widehat{a}, \widehat{b} \in \mathbb{R}$ mit

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - (\widehat{a} + \widehat{b}x_i))^2 = \min_{a,b\in\mathbb{R}} \sum_{i=1}^{n}(y_i - (a + bx_i))^2$$

- Lösung dieses Optimierungsproblems durch Nullsetzen des Gradienten, also

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^{n}(y_i - (a + bx_i))^2}{\partial a} = -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - a - bx_i) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^{n}(y_i - (a + bx_i))^2}{\partial b} = -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - a - bx_i)x_i \stackrel{!}{=} 0\ ,$$

führt zu sogenannten **Normalgleichungen**:

$$na + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) b \stackrel{!}{=} \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) a + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) b \stackrel{!}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Rechnerische Bestimmung der Regressionsgeraden (II)

- Aufgelöst nach a und b erhält man die Lösungen

$$\widehat{b} = \frac{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

$$\widehat{a} = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\cdot\widehat{b}$$

oder kürzer mit den aus der deskr. Statistik bekannten Bezeichnungen

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad \overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2, \quad \overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \quad \text{und} \quad \overline{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

bzw. den empirischen Momenten $s_{X,Y} = \overline{xy} - \overline{x}\cdot\overline{y}$ und $s_X^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2$:

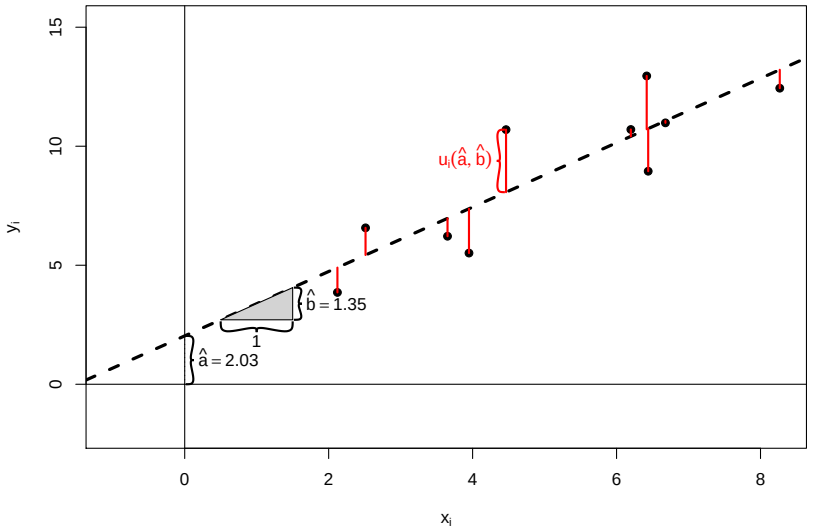
$$\widehat{b} = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\cdot\overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} = \frac{s_{X,Y}}{s_X^2}$$

$$\widehat{a} = \overline{y} - \overline{x}\widehat{b}$$

- Die erhaltenen Werte $\widehat{a}$ und $\widehat{b}$ minimieren tatsächlich die Summe der quadrierten vertikalen Abstände, da die Hesse-Matrix positiv definit ist.

Beispiel: „Punktwolke“ und Regressionsgerade

$\widehat{a} = 2.03$, $\widehat{b} = 1.35$, $\sum_{i=1}^{n}(u_i(\widehat{a},\widehat{b}))^2 = 22.25$



- Zu $\widehat{a}$ und $\widehat{b}$ kann man offensichtlich die folgende, *durch die Regressionsgerade erzeugte* Zerlegung der Merkmalswerte y_i betrachten:

$$y_i = \underbrace{\widehat{a} + \widehat{b}\cdot x_i}_{=:\widehat{y}_i} + \underbrace{y_i - (\widehat{a} + \widehat{b}\cdot x_i)}_{=u_i(\widehat{a},\widehat{b})=:\widehat{u}_i}$$

- Aus den Normalgleichungen lassen sich leicht einige wichtige Eigenschaften für die so definierten $\widehat{u}_i$ und $\widehat{y}_i$ herleiten, insbesondere:
  - $\sum_{i=1}^{n}\widehat{u}_i = 0$ und damit $\sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n}\widehat{y}_i$ bzw. $\overline{y} = \overline{\widehat{y}} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\widehat{y}_i$.
  - $\sum_{i=1}^{n} x_i\widehat{u}_i = 0$.
  - Mit $\sum_{i=1}^{n}\widehat{u}_i = 0$ und $\sum_{i=1}^{n} x_i\widehat{u}_i = 0$ folgt auch $\sum_{i=1}^{n}\widehat{y}_i\widehat{u}_i = 0$.

Mit diesen Eigenschaften erhält man die folgende Varianzzerlegung:

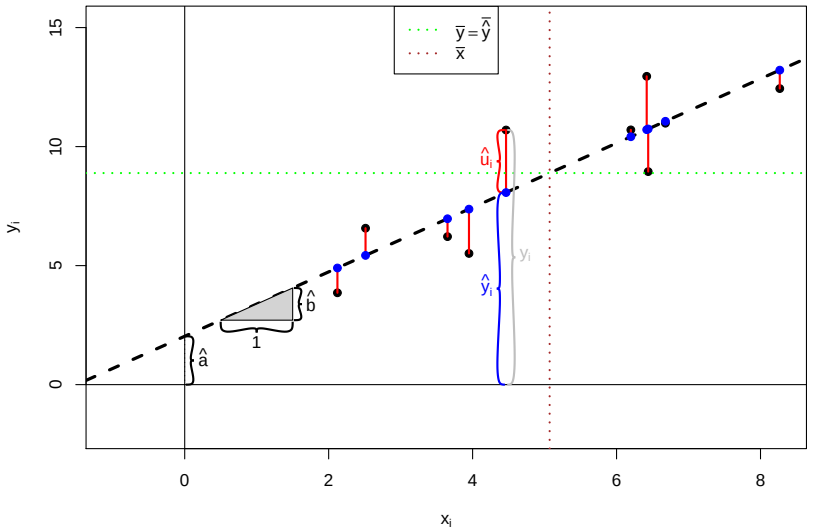
$$\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}_{\text{Gesamtvarianz der } y_i} = \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\widehat{y}_i - \overline{\widehat{y}})^2}_{\text{erklärte Varianz}} + \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\widehat{u}_i^2}_{\text{unerklärte Varianz}}$$

- Die als Anteil der erklärten Varianz an der Gesamtvarianz gemessene Stärke des linearen Zusammenhangs steht in engem Zusammenhang mit $r_{X,Y}$; es gilt:

$$r_{X,Y}^2 = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\widehat{y}_i - \overline{\widehat{y}})^2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}$$

Beispiel: Regressionsgerade mit Zerlegung $y_i = \widehat{y}_i + \widehat{u}_i$

$\widehat{a} = 2.03$, $\widehat{b} = 1.35$, $\sum_{i=1}^{n} (\widehat{u}_i)^2 = 22.25$



Beispiel: Berechnung von $\widehat{a}$ und $\widehat{b}$

- Daten im Beispiel:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	2.51	8.27	4.46	3.95	6.42	6.44	2.12	3.65	6.2	6.68
y_i	6.57	12.44	10.7	5.51	12.95	8.95	3.86	6.22	10.7	10.98

- Berechnete (deskriptive/empirische) Größen:

$$\overline{x} = 5.0703 \qquad \overline{y} = 8.8889 \qquad \overline{x^2} = 29.3729 \qquad \overline{y^2} = 87.9398$$
$$s_X^2 = 3.665 \qquad s_Y^2 = 8.927 \qquad s_{X,Y} = 4.956 \qquad r_{X,Y} = 0.866$$

- Damit erhält man Absolutglied $\widehat{a}$ und Steigung $\widehat{b}$ als

$$\widehat{b} = \frac{s_{X,Y}}{s_X^2} = \frac{4.956}{3.665} = 1.352$$
$$\widehat{a} = \overline{y} - \widehat{b} \cdot \overline{x} = 8.8889 - 1.352 \cdot 5.0703 = 2.03$$

und damit die Regressionsgerade

$$y = f(x) = 2.03 + 1.352 \cdot x \ .$$

- *Bisher: rein deskriptive Betrachtung linearer Zusammenhänge*
- Bereits erläutert/bekannt: Korrelation $\neq$ Kausalität:
  Aus einem beobachteten (linearen) Zusammenhang zwischen zwei Merkmalen lässt sich **nicht** schließen, dass der Wert eines Merkmals den des anderen beeinflusst.
- Bereits durch die Symmetrieeigenschaft $r_{X,Y} = r_{Y,X}$ bei der Berechnung von Pearsonschen Korrelationskoeffizienten wird klar, dass diese Kennzahl alleine auch keine Wirkungsrichtung erkennen lassen **kann**.
- *Nun: statistische Modelle für lineare Zusammenhänge*
- **Keine** symmetrische Behandlung von X und Y mehr, sondern:
  - Interpretation von X („Regressor“) als **erklärende** *deterministische* Variable.
  - Interpretation von Y („Regressand“) als **abhängige, zu erklärende** (Zufalls-)Variable.
- Es wird angenommen, dass Y in linearer Form von X abhängt, diese Abhängigkeit jedoch nicht „perfekt“ ist, sondern durch zufällige Einflüsse „gestört“ wird.
- Anwendung in Experimenten: Festlegung von X durch Versuchsplaner, Untersuchung des Effekts auf Y
- Damit auch Kausalitätsanalysen möglich!

Das einfache lineare Regressionsmodell

- Es wird genauer angenommen, dass für $i \in \{1, \ldots, n\}$ die Beziehung

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 \cdot x_i + u_i$$

gilt, wobei
  - $u_1, \ldots, u_n$ (Realisationen von) Zufallsvariablen mit $\mathrm{E}(u_i) = 0$, $\mathrm{Var}(u_i) = \sigma^2$ (unbekannt) und $\mathrm{Cov}(u_i, u_j) = 0$ für $i \neq j$ sind, die zufällige Störungen der linearen Beziehung (**„Störgrößen“**) beschreiben,
  - $x_1, \ldots, x_n$ deterministisch sind mit $s_X^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 > 0$ (d.h. nicht alle x_i sind gleich),
  - β_1, β_2 feste, **unbekannte** reelle Parameter sind.
- Man nimmt an, dass man neben $x_1, \ldots, x_n$ auch $y_1, \ldots, y_n$ beobachtet, die wegen der Abhängigkeit von den Zufallsvariablen $u_1, \ldots, u_n$ ebenfalls (Realisationen von) Zufallsvariablen sind. Dies bedeutet **nicht**, dass man auch (Realisationen von) $u_1, \ldots, u_n$ beobachten kann (β_1 und β_2 unbekannt!).
- Für die Erwartungswerte von y_i gilt

$$E(y_i) = \beta_1 + \beta_2 \cdot x_i \text{ für } i \in \{1, \ldots, n\} \ .$$

- Das durch obige Annahmen beschriebene Modell heißt auch
  einfaches lineares Regressionsmodell.