Hypothesentests

- *Bisher* wichtigstes betrachtetes Anwendungsbeispiel der schließenden Statistik:

  Punkt- bzw. Intervallschätzung des unbekannten Mittelwerts

- Hierzu: Verwendung der
  1. theoretischen Information über Verteilung von $\overline{X}$
  2. empirischen Information aus Stichprobenrealisation $\overline{x}$ von $\overline{X}$

  zur Konstruktion einer
  - Punktschätzung (inkl. Beurteilung der Genauigkeit des Schätzers!)
  - Intervallschätzung, bei der jede Stichprobenziehung mit einer vorgegebenen Chance ein realisiertes (Konfidenz-)Intervall liefert, welches den (wahren) Mittelwert enthält.

- Nächste Anwendung: **Hypothesentests**:

  Entscheidung, ob die unbekannte, wahre Verteilung von Y zu einer vorgegebenen Teilmenge der Verteilungsannahme W gehört oder nicht.

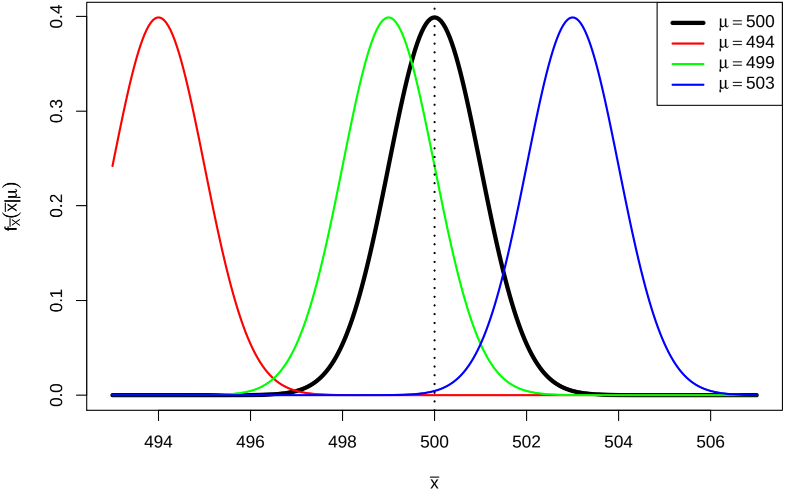
- Zunächst: Illustration der Vorgehensweise am Beispiel einer Entscheidung über den Mittelwert der Verteilung.

Einführendes Beispiel

- Interessierende Zufallsvariable Y:
  Von einer speziellen Abfüllmaschine abgefüllte Inhaltsmenge von Müslipackungen mit Soll-Inhalt $\mu_0 = 500$ (in $[g]$).
- Verteilungsannahme:
  $Y \sim N(\mu, 4^2)$ mit unbekanntem Erwartungswert $\mu = E(Y)$.
- Es liege eine Realisation $x_1, \ldots, x_{16}$ einer einfachen Stichprobe $X_1, \ldots, X_{16}$ vom Umfang $n = 16$ zu Y vor.
- **Ziel:** Verwendung der Stichprobeninformation (über $\overline{X}$ bzw. $\overline{x}$), um zu **entscheiden**, ob die tatsächliche mittlere Füllmenge (also der wahre, unbekannte Parameter μ) mit dem Soll-Inhalt $\mu_0 = 500$ übereinstimmt oder nicht.
- Offensichlich gilt:
  - $\overline{X}$ schwankt um den wahren Mittelwert μ; selbst wenn $\mu = 500$ gilt, wird $\overline{X}$ praktisch nie genau den Wert $\overline{x} = 500$ annehmen!
  - Realisationen $\overline{x}$ „in der Nähe“ von 500 sprechen eher dafür, dass $\mu = 500$ gilt.
  - Realisationen $\overline{x}$ „weit weg“ von 500 sprechen eher dagegen, dass $\mu = 500$ gilt.
- Also: Entscheidung für Hypothese $\mu = 500$, wenn $\overline{x}$ nahe bei 500, und gegen $\mu = 500$ (also für $\mu \neq 500$), wenn $\overline{x}$ weit weg von 500.
- **Aber:** Wo ist die Grenze zwischen „in der Nähe“ und „weit weg“?

Verteilungen von $\overline{X}$

für verschiedene Parameter μ bei $\sigma = 4$ und $n = 16$



Entscheidungsproblem

- Fällen einer Entscheidung zwischen $\mu = 500$ und $\mu \neq 500$ führt zu *genau einer* der folgenden vier verschiedenen Situationen:

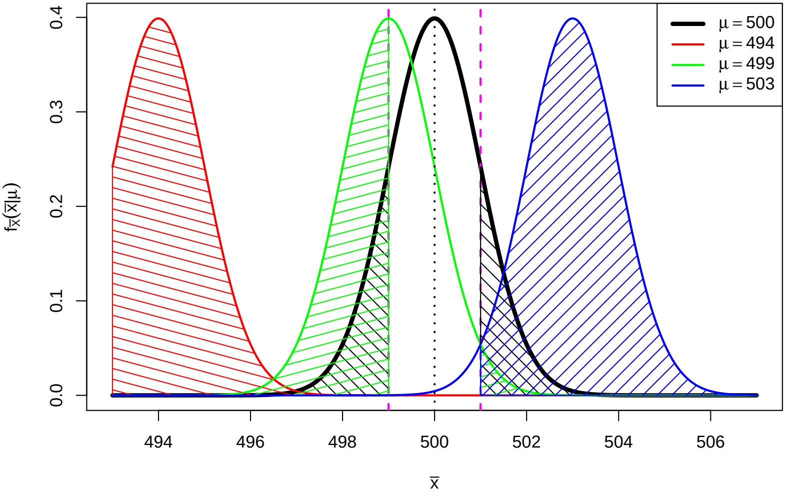
	Tatsächliche Situation: $\mu = 500$	Tatsächliche Situation: $\mu \neq 500$
Entscheidung für $\mu = 500$	richtige Entscheidung	Fehler 2. Art
Entscheidung für $\mu \neq 500$	Fehler 1. Art	richtige Entscheidung

- Wünschenswert:
  Sowohl „Fehler 1. Art" als auch „Fehler 2. Art" möglichst selten begehen.
- **Aber:** Zielkonflikt vorhanden:
  Je näher Grenze zwischen „in der Nähe" und „weit weg" an $\mu_0 = 500$, desto
  - seltener Fehler 2. Art
  - häufiger Fehler 1. Art

  und umgekehrt für fernere Grenzen zwischen „in der Nähe" und „weit weg".

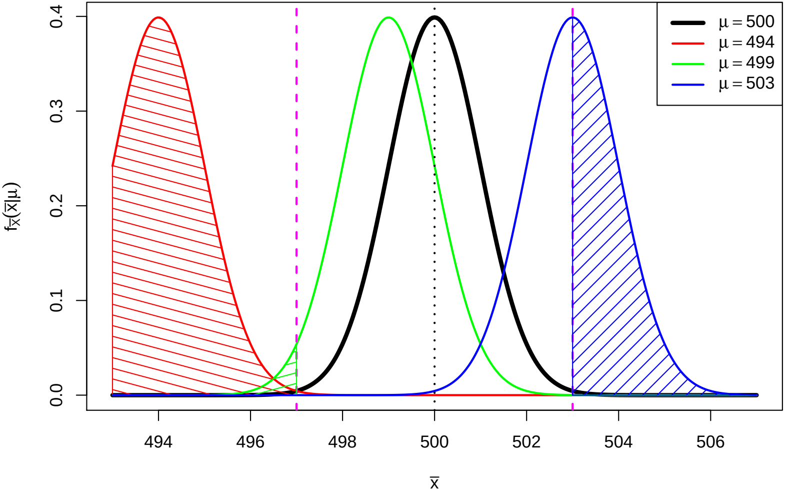
Beispiel für „nahe“ Grenze

Für $\mu \neq 500$ (gegen $\mu = 500$) entscheiden, wenn Abstand zwischen $\overline{x}$ und 500 größer als 1



Beispiel für „ferne“ Grenze

Für $\mu \neq 500$ (gegen $\mu = 500$) entscheiden, wenn Abstand zwischen $\overline{x}$ und 500 größer als 3



- Unmöglich, Wahrscheinlichkeiten der Fehler 1. Art und 2. Art gleichzeitig für alle möglichen Situationen (also alle μ) zu verringern.
- Übliche Vorgehensweise: **Fehler(wahrscheinlichkeit) 1. Art kontrollieren!**
- Also: Vorgabe einer *kleinen* Schranke α (**„Signifikanzniveau“**) für die Wahrscheinlichkeit, mit der man einen Fehler 1. Art begehen darf.
- Festlegung der Grenze zwischen „in der Nähe“ und „weit weg“ so, dass man den Fehler 1. Art nur mit Wahrscheinlichkeit α begeht, also die Realisation $\overline{x}$ **bei Gültigkeit von** $\mu = 500$ nur mit einer Wahrscheinlichkeit von α jenseits der Grenzen liegt, bis zu denen man sich für $\mu = 500$ entscheidet!
- Damit liefert aber das Schwankungsintervall für $\overline{X}$ zur Sicherheitswahrscheinlichkeit $1 - \alpha$

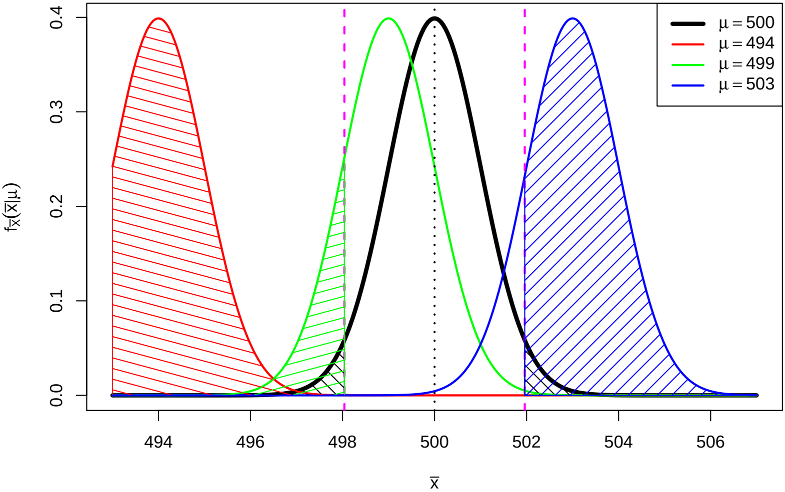
$$\left[\mu - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot N_{1-\frac{\alpha}{2}}, \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot N_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$$

für $\mu = \mu_0 = 500$ **(!)** gerade solche Grenzen, denn es gilt im Fall $\mu = \mu_0 = 500$

$$P\left\{\overline{X} \notin \left[\mu_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot N_{1-\frac{\alpha}{2}}, \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot N_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]\right\} = \alpha\ .$$

Beispiel für Grenze zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$

Grenzen aus Schwankungsintervall zur Sicherheitswahrscheinlichkeit $1 - \alpha = 0.95$



- Bei einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0.05$ entscheidet man sich also **für** $\mu = \mu_0 = 500$ genau dann, wenn die Realisation $\overline{x}$ von $\overline{X}$ im Intervall
$$\left[500 - \frac{4}{\sqrt{16}} \cdot N_{0.975}, 500 + \frac{4}{\sqrt{16}} \cdot N_{0.975}\right] = [498.04, 501.96] \ ,$$
dem sog. **Annahmebereich** des Hypothesentests, liegt.
- Entsprechend fällt die Entscheidung für $\mu \neq 500$ (bzw. **gegen** $\mu = 500$) aus, wenn die Realisation $\overline{x}$ von $\overline{X}$ in der Menge
$$(-\infty, 498.04) \cup (501.96, \infty) \ ,$$
dem sog. **Ablehnungsbereich** oder **kritischen Bereich** des Hypothesentests, liegt.
- Durch Angabe eines dieser Bereiche ist die Entscheidungsregel offensichtlich schon vollständig spezifiziert!
- Statt Entscheidungsregel auf Grundlage der Realisation $\overline{x}$ von $\overline{X}$ (unter Verwendung der Eigenschaft $\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$) üblicher:
Äquivalente Entscheidungsregel auf Basis der sog. **Testgröße** oder **Teststatistik** $N := \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$ unter Verwendung der Eigenschaft
$$\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0, 1) \quad \text{falls} \quad \mu = \mu_0 \ .$$

- Die Verteilungeigenschaft von $N = \frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$ für $\mu = \mu_0$ aus Folie 97 erhält man aus der allgemeineren Verteilungsaussage

$$\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n} \sim N\left(\frac{\mu-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}, 1\right) ,$$

die man wiederum aus der Verteilung $\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ durch Anwendung der aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung bekannten Transformationsregeln ableiten kann. Damit: $F_N(x) = P\{N \leq x\} = \Phi\left(x - \frac{\mu-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right)$

- Man rechnet außerdem leicht nach:

$$\overline{X} \in \left[\mu_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot N_{1-\frac{\alpha}{2}}, \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot N_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \Leftrightarrow \frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n} \in \left[-N_{1-\frac{\alpha}{2}}, N_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$$

- Als Annahmebereich A für die Testgröße $N = \frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$ erhält man also $\left[-N_{1-\frac{\alpha}{2}}, N_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$, als kritischen Bereich K entsprechend

$$K = \mathbb{R}\backslash A = \left(-\infty, -N_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \cup \left(N_{1-\frac{\alpha}{2}}, \infty\right)$$

und damit eine Formulierung der Entscheidungsregel auf Grundlage von N.

- In Abhängigkeit des tatsächlichen Erwartungswerts μ von Y kann so die Wahrscheinlichkeit für die Ablehnung der Hypothese $\mu = \mu_0$ berechnet werden:

$$\begin{aligned} P\{N \in K\} &= P\left\{N \in (-\infty, -N_{1-\frac{\alpha}{2}}) \cup (N_{1-\frac{\alpha}{2}}, \infty)\right\} \\ &= P\left\{N < -N_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\} + P\left\{N > N_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\} \\ &= \Phi\left(-N_{1-\frac{\alpha}{2}} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right) + 1 - \Phi\left(N_{1-\frac{\alpha}{2}} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right) \end{aligned}$$

- Im Beispiel erhält man damit die folgenden Wahrscheinlichkeiten für Annahme bzw. Ablehnung der Hypothese $\mu = \mu_0 = 500$ zu den betrachteten Szenarien (also unterschiedlichen wahren Parametern μ):

	Wahrscheinlichkeit der Annahme von $\mu = 500$ $P\{N \in A\}$	Wahrscheinlichkeit der Ablehnung von $\mu = 500$ $P\{N \in K\}$
$\mu = 500$	**0.95**	0.05
$\mu = 494$	0	**1**
$\mu = 499$	0.8299	**0.1701**
$\mu = 503$	0.1492	**0.8508**

(Fettgedruckte Wahrscheinlichkeiten entsprechen korrekter Entscheidung.)

Grundbegriffe: Hypothesen

- Bekannt: Hypothesentests sind Entscheidungsregeln für die Fragestellung

  „Liegt die (unbekannte) Verteilung Q_Y von Y in einer bestimmten **Teilmenge** der Verteilungsannahme W oder nicht?“
- Zur präzisen Formulierung der Fragestellung: Angabe der interessierenden Teilmenge W_0 von Verteilungen mit $\emptyset \neq W_0 \subsetneq W$
- Man nennt dann die Hypothese $Q_Y \in W_0$ auch **Nullhypothese** und schreibt $H_0 : Q_Y \in W_0$. Die Verletzung der Nullhypothese entspricht dem Eintreten der sog. **Gegenhypothese** oder **Alternative** $Q_Y \in W_1 := W \backslash W_0$; man schreibt auch $H_1 : Q_Y \in W_1$.
- Formulierung *prinzipiell* immer in zwei Varianten möglich, da W_0 und W_1 vertauscht werden können. Welche der beiden Varianten gewählt wird, ist allerdings wegen der Asymmetrie in den Wahrscheinlichkeiten für Fehler 1. und 2. Art **nicht unerheblich** (später mehr!).
- Eine Hypothese heißt **einfach**, wenn die zugehörige Teilmenge von W einelementig ist, **zusammengesetzt** sonst.
- Im Beispiel: $W = \{N(\mu, 4^2) \,|\, \mu \in \mathbb{R}\}, W_0 = \{N(500, 4^2)\}$.
  H_0 ist also einfach, H_1 zusammengesetzt.

Hypothesen bei parametrischen Verteilungsannahmen

- Ist W eine parametrische Verteilungsannahme mit Parameterraum Θ, so existiert offensichtlich immer auch eine (äquivalente) Darstellung von H_0 und H_1 in der Gestalt

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \qquad \text{gegen} \qquad H_1 : \theta \in \Theta_1 := \Theta \backslash \Theta_0$$

für eine Teilmenge Θ_0 des Parameterraums Θ mit $\emptyset \neq \Theta_0 \subsetneq \Theta$.
- Im Beispiel: $W = \{N(\mu, 4^2) \,|\, \mu \in \Theta = \mathbb{R}\}, \Theta_0 = \{500\}$
- Hypothesenformulierung damit z.B. in der folgenden Form möglich:

$$H_0 : \mu = \mu_0 = 500 \qquad \text{gegen} \qquad H_1 : \mu \neq \mu_0 = 500$$

- Hypothesentests bei parametrischer Verteilungsannahme heißen auch **parametrische (Hypothesen-)Tests**.
- Parametrische Tests heißen (für $\Theta \subseteq \mathbb{R}$) **zweiseitig**, wenn Θ_1 **links und rechts** von Θ_0 liegt, **einseitig** sonst (Im Beispiel: zweiseitiger Test).
- Einseitige Tests heißen **linksseitig**, wenn Θ_1 links von Θ_0 liegt, **rechtsseitig** sonst.

Teststatistik und Ablehnungsbereich

- Nach Präzisierung der Fragestellung in den Hypothesen benötigt man nun eine geeignete **Entscheidungsregel**, die *im Prinzip* jeder möglichen Stichprobenrealisation (aus dem Stichprobenraum $\mathcal{X}$) eine Entscheidung **entweder** für H_0 **oder** für H_1 zuordnet.
- In der Praxis Entscheidung (fast) immer in 3 Schritten:
  1. „Zusammenfassung" der für die Entscheidungsfindung relevanten Stichprobeninformation mit einer geeigneten Stichprobenfunktion, der sog. **Teststatistik** oder **Testgröße** T.
  2. Angabe eines **Ablehnungsbereichs** bzw. **kritischen Bereichs** K, in den die Teststatistik **bei Gültigkeit von** H_0 nur mit einer typischerweise kleinen Wahrscheinlichkeit (durch eine obere Grenze α beschränkt) fallen darf.
  3. Entscheidung **gegen** H_0 bzw. für H_1, falls realisierter Wert der Teststatistik in den **Ablehnungsbereich** bzw. **kritischen Bereich** K fällt, also $T \in K$ gilt (für H_0, falls $T \notin K$).
- Konstruktion des kritischen Bereichs K in Schritt 2 gerade so, dass **Wahrscheinlichkeit für Fehler 1. Art beschränkt** bleibt durch ein vorgegebenes **Signifikanzniveau** (auch **„Irrtumswahrscheinlichkeit"**) α.
- Konstruktion meist so, dass Niveau α gerade eben eingehalten wird (also **kleinste** obere Schranke für die Fehlerwahrscheinlichkeit 1. Art ist).

- Für Konstruktion des kritischen Bereichs wesentlich:
  Analyse der Verteilung der Teststatistik, insbesondere falls H_0 gilt!
- **Im Beispiel:**
  1. Teststatistik: $N = \frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$
     Verteilung: $N \sim N\left(\frac{\mu-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}, 1\right)$, also insbesondere
     $N \sim N(0,1)$ falls H_0 (also $\mu = \mu_0$) gilt.
  2. Kritischer Bereich: $K = \left(-\infty, -N_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \cup \left(N_{1-\frac{\alpha}{2}}, \infty\right)$

  Wahrscheinlichkeit der Ablehnung von H_0 (abhängig vom Parameter μ):

$$P\{N \in K\} = \Phi\left(-N_{1-\frac{\alpha}{2}} - \frac{\mu-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right) + 1 - \Phi\left(N_{1-\frac{\alpha}{2}} - \frac{\mu-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right)$$

- Die Zuordnung $G : \Theta \to \mathbb{R}; G(\theta) = P\{T \in K\}$ heißt (allgemein) auch **Gütefunktion** des Tests. Im Beispiel also:

$$G(\mu) = \Phi\left(-N_{1-\frac{\alpha}{2}} - \frac{\mu-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right) + 1 - \Phi\left(N_{1-\frac{\alpha}{2}} - \frac{\mu-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right)$$

- Mit der Gütefunktion können also offensichtlich
  - Fehlerwahrscheinlichkeiten 1. Art (für $\theta \in \Theta_0$) direkt durch $G(\theta)$ und
  - Fehlerwahrscheinlichkeiten 2. Art (für $\theta \in \Theta_1$) durch $1 - G(\theta)$

  berechnet werden!

- Berechnung der Eintrittswahrscheinlichkeiten EW mit Gütefunktion $G(\theta)$:

	Tatsächliche Situation: $\theta \in \Theta_0$ (H_0 wahr)	Tatsächliche Situation: $\theta \notin \Theta_0$ (H_0 falsch)
Entscheidung für H_0 ($\theta \in \Theta_0$)	richtige Entscheidung $EW: 1 - G(\theta)$	Fehler 2. Art $EW: 1 - G(\theta)$
Entscheidung gegen H_0 ($\theta \notin \Theta_0$)	Fehler 1. Art $EW: G(\theta)$	richtige Entscheidung $EW: G(\theta)$

- Welche Teststatistik geeignet ist und wie die Teststatistik dann verteilt ist, hängt nicht nur von der Problemformulierung (Hypothesen), sondern oft auch von der Verteilungsannahme ab!
- Test aus Beispiel zum Beispiel *exakt* anwendbar, falls $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ **mit bekannter Varianz**, und *approximativ* anwendbar, wenn Y beliebig verteilt ist **mit bekannter Varianz** (Güte der Näherung abhängig von n sowie Verteilung von Y!)
- Test aus Beispiel heißt auch „zweiseitiger Gauß-Test für den Mittelwert einer Zufallsvariablen mit bekannter Varianz“.

Zweiseitiger Gauß-Test

für den Mittelwert einer Zufallsvariablen mit bekannter Varianz

Anwendung

- als **exakter** Test, falls Y normalverteilt und $\text{Var}(Y) = \sigma^2$ bekannt,
- als **approximativer** Test, falls Y beliebig verteilt mit bekannter Varianz σ^2.

„Testrezept" des **zweiseitigen Tests**:

1. Hypothesen: $H_0 : \mu = \mu_0$ gegen $H_1 : \mu \neq \mu_0$ für ein vorgegebenes $\mu_0 \in \mathbb{R}$.
2. Teststatistik:
$$N := \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} \text{ mit } N \sim N(0,1) \text{ (bzw. } N \overset{\bullet}{\sim} N(0,1)), \text{ falls } H_0 \text{ gilt } (\mu = \mu_0).$$
3. Kritischer Bereich zum Signifikanzniveau α:
$$K = \left(-\infty, -N_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \cup \left(N_{1-\frac{\alpha}{2}}, \infty\right)$$
4. Berechnung der realisierten Teststatistik N
5. Entscheidung: H_0 ablehnen $\Leftrightarrow$ $N \in K$.

Beispiel: Qualitätskontrolle (Länge von Stahlstiften)

- Untersuchungsgegenstand: Weicht die mittlere Länge der von einer bestimmten Maschine produzierten Stahlstifte von der Solllänge $\mu_0 = 10$ (in [cm]) ab, so dass die Produktion gestoppt werden muss?
- Annahmen: Für Länge Y der produzierten Stahlstifte gilt: $Y \sim N(\mu, 0.4^2)$
- Stichprobeninformation: Realisation einer einfachen Stichprobe vom Umfang $n = 64$ zu Y liefert Stichprobenmittel $\overline{x} = 9.7$.
- Gewünschtes Signifikanzniveau (max. Fehlerwahrscheinlichkeit 1. Art): $\alpha = 0.05$

Geeigneter Test:
(Exakter) Gauß-Test für den Mittelwert bei bekannter Varianz

1. Hypothesen: $H_0 : \mu = \mu_0 = 10 \quad \text{gegen} \quad H_1 : \mu \neq \mu_0 = 10$
2. Teststatistik: $N = \frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$, falls H_0 gilt ($\mu = \mu_0$)
3. Kritischer Bereich zum Niveau $\alpha = 0.05$:
   $K = (-\infty, -N_{0.975}) \cup (N_{0.975}, \infty) = (-\infty, -1.96) \cup (1.96, \infty)$
4. Realisierter Wert der Teststatistik: $N = \frac{9.7-10}{0.4}\sqrt{64} = -6$
5. Entscheidung: $N \in K \rightsquigarrow H_0$ wird abgelehnt und die Produktion gestoppt.

Einseitige Gauß-Tests

Wahl der Hypothesen

- Bei zweiseitigem Test: Hypothesentest zu

$$H_0 : \mu \neq \mu_0 \qquad \text{gegen} \qquad H_1 : \mu = \mu_0$$

  zwar konstruierbar, aber ohne praktische Bedeutung.
- Neben zweiseitigem Test zwei (symmetrische) einseitige Varianten:

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \qquad \text{gegen} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$
$$H_0 : \mu \geq \mu_0 \qquad \text{gegen} \qquad H_1 : \mu < \mu_0$$

- Konstruktion der Tests beschränkt Wahrscheinlichkeit, H_0 **fälschlicherweise abzulehnen**. Entscheidung zwischen beiden Varianten daher wie folgt:

  H_0 : **Nullhypothese** ist in der Regel die Aussage, die von vornherein als glaubwürdig gilt und die man beibehält, wenn das Stichprobenergebnis bei Gültigkeit von H_0 nicht sehr untypisch bzw. überraschend ist.

  H_1 : **Gegenhypothese** ist in der Regel die Aussage, die man statistisch absichern möchte und für deren Akzeptanz man hohe Evidenz fordert.
  Die Entscheidung für H_1 hat typischerweise erhebliche Konsequenzen, so dass man das Risiko einer fälschlichen Ablehnung von H_0 zugunsten von H_1 kontrollieren will.

- Auch für einseitige Tests fasst Teststatistik

$$N = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} \quad \text{mit} \quad N \sim N\left(\frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}, 1\right)$$

  die empirische Information über den Erwartungswert μ geeignet zusammen.
- Allerdings gilt nun offensichtlich
  - im Falle des **rechtsseitigen** Tests von

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \qquad \text{gegen} \qquad H_1 : \mu > \mu_0\ ,$$

    dass **große (insbesondere positive)** Realisationen von N gegen H_0 und für H_1 sprechen, sowie
  - im Falle des **linksseitigen** Tests von

$$H_0 : \mu \geq \mu_0 \qquad \text{gegen} \qquad H_1 : \mu < \mu_0\ ,$$

    dass **kleine (insbesondere negative)** Realisationen von N gegen H_0 und für H_1 sprechen.
- Noch nötig zur Konstruktion der Tests:
  Geeignetes Verfahren zur Wahl der **kritischen Bereiche** so, dass Wahrscheinlichkeit für Fehler 1. Art durch vorgegebenes Signifikanzniveau α beschränkt bleibt.

Kritischer Bereich (rechtsseitiger Test)

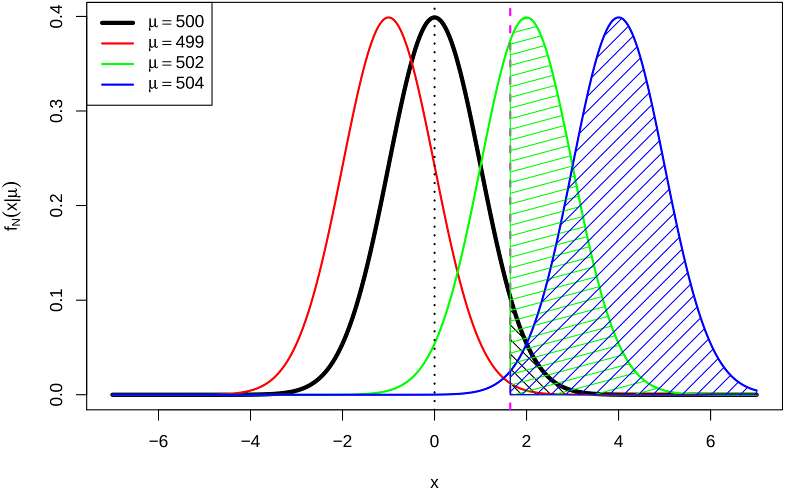
- Für **rechtsseitigen** Test muss also zur Konstruktion des kritischen Bereichs ein **kritischer Wert** bestimmt werden, den die Teststatistik N im Fall der Gültigkeit von H_0 **maximal** mit einer Wahrscheinlichkeit von α überschreitet.
- Gesucht ist also ein Wert k_α mit $P\{N \in (k_\alpha, \infty)\} \leq \alpha$ **für alle** $\mu \leq \mu_0$.
- Offensichtlich wird $P\{N \in (k_\alpha, \infty)\}$ mit wachsendem μ größer, es genügt also, die Einhaltung der Bedingung $P\{N \in (k_\alpha, \infty)\} \leq \alpha$ für das **größtmögliche** μ mit der Eigenschaft $\mu \leq \mu_0$, also $\mu = \mu_0$, zu gewährleisten.
- Um die Fehlerwahrscheinlichkeit 2. Art unter Einhaltung der Bedingung an die Fehlerwahrscheinlichkeit 1. Art möglichst klein zu halten, wird k_α gerade so gewählt, dass $P\{N \in (k_\alpha, \infty)\} = \alpha$ für $\mu = \mu_0$ gilt.
- Wegen $N \sim N(0,1)$ für $\mu = \mu_0$ erhält man hieraus

$$\begin{aligned}
& & P\{N \in (k_\alpha, \infty)\} &= \alpha \\
\Leftrightarrow & & 1 - P\{N \in (-\infty, k_\alpha)\} &= \alpha \\
\Leftrightarrow & & \Phi(k_\alpha) &= 1 - \alpha \\
\Leftrightarrow & & k_\alpha &= N_{1-\alpha}
\end{aligned}$$

und damit insgesamt den kritischen Bereich $K = (N_{1-\alpha}, \infty)$ für den rechtsseitigen Test.

Beispiel für Verteilungen von N

Rechtsseitiger Test ($\mu_0 = 500$) zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$



Rechtsseitiger Gauß-Test

für den Mittelwert einer Zufallsvariablen mit bekannter Varianz

Anwendung

- als **exakter** Test, falls Y normalverteilt und $\text{Var}(Y) = \sigma^2$ bekannt,
- als **approximativer** Test, falls Y beliebig verteilt mit bekannter Varianz σ^2.

„Testrezept" des **rechtsseitigen Tests**:

1. Hypothesen: $H_0 : \mu \leq \mu_0$ gegen $H_1 : \mu > \mu_0$ für ein vorgegebenes $\mu_0 \in \mathbb{R}$.
2. Teststatistik:
$$N := \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} \text{ mit } N \sim N(0,1) \ (N \overset{\bullet}{\sim} N(0,1)), \text{ falls } H_0 \text{ gilt (mit } \mu = \mu_0).$$
3. Kritischer Bereich zum Signifikanzniveau α:
$$K = (N_{1-\alpha}, \infty)$$
4. Berechnung der realisierten Teststatistik N
5. Entscheidung: H_0 ablehnen $\Leftrightarrow \ N \in K$.

Kritischer Bereich (linksseitiger Test)

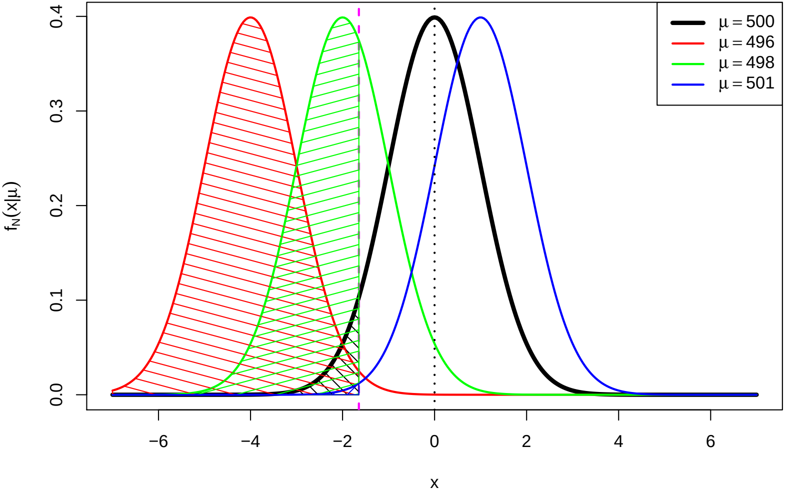
- Für **linksseitigen** Test muss zur Konstruktion des kritischen Bereichs ein **kritischer Wert** bestimmt werden, den die Teststatistik N im Fall der Gültigkeit von H_0 **maximal** mit einer Wahrscheinlichkeit von α unterschreitet.
- Gesucht ist also ein Wert k_α mit $P\{N \in (-\infty, k_\alpha)\} \leq \alpha$ **für alle** $\mu \geq \mu_0$.
- Offensichtlich wird $P\{N \in (-\infty, k_\alpha)\}$ mit fallendem μ größer, es genügt also, die Einhaltung der Bedingung $P\{N \in (-\infty, k_\alpha)\} \leq \alpha$ für das **kleinstmögliche** μ mit $\mu \geq \mu_0$, also $\mu = \mu_0$, zu gewährleisten.
- Um die Fehlerwahrscheinlichkeit 2. Art unter Einhaltung der Bedingung an die Fehlerwahrscheinlichkeit 1. Art möglichst klein zu halten, wird k_α gerade so gewählt, dass $P\{N \in (-\infty, k_\alpha)\} = \alpha$ für $\mu = \mu_0$ gilt.
- Wegen $N \sim N(0,1)$ für $\mu = \mu_0$ erhält man hieraus

$$\begin{aligned} & P\{N \in (-\infty, k_\alpha)\} = \alpha \\ \Leftrightarrow \quad & \Phi(k_\alpha) = \alpha \\ \Leftrightarrow \quad & k_\alpha = N_\alpha \\ \Leftrightarrow \quad & k_\alpha = -N_{1-\alpha} \end{aligned}$$

und damit insgesamt den kritischen Bereich $K = (-\infty, -N_{1-\alpha})$ für den linksseitigen Test.

Beispiel für Verteilungen von N

Linksseitiger Test ($\mu_0 = 500$) zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$



Linksseitiger Gauß-Test

für den Mittelwert einer Zufallsvariablen mit bekannter Varianz

Anwendung

- als **exakter** Test, falls Y normalverteilt und $\text{Var}(Y) = \sigma^2$ bekannt,
- als **approximativer** Test, falls Y beliebig verteilt mit bekannter Varianz σ^2.

„Testrezept" des **linksseitigen Tests**:

1. Hypothesen: $H_0 : \mu \geq \mu_0$ gegen $H_1 : \mu < \mu_0$ für ein vorgegebenes $\mu_0 \in \mathbb{R}$.
2. Teststatistik:
$$N := \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} \text{ mit } N \sim N(0,1) \ (N \overset{\bullet}{\sim} N(0,1)), \text{ falls } H_0 \text{ gilt (mit } \mu = \mu_0).$$
3. Kritischer Bereich zum Signifikanzniveau α:
$$K = (-\infty, -N_{1-\alpha})$$
4. Berechnung der realisierten Teststatistik N
5. Entscheidung: H_0 ablehnen $\Leftrightarrow$ $N \in K$.

Gütefunktionen einseitiger Gauß-Tests

- Gütefunktion allgemein: $G(\theta) = P\{T \in K\}$
- Für **rechtsseitigen** Gauß-Test:
  - $G(\mu) = P\left\{N \in (N_{1-\alpha}, \infty)\right\}$
  - Mit $N \sim N\left(\frac{\mu-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}, 1\right)$ erhält man

$$\begin{aligned} P\left\{N \in (N_{1-\alpha}, \infty)\right\} &= 1 - P\left\{N \leq N_{1-\alpha}\right\} \\ &= 1 - \Phi\left(N_{1-\alpha} - \frac{\mu-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{\mu-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n} - N_{1-\alpha}\right) \end{aligned}$$

- Für **linksseitigen** Gauß-Test:
  - $G(\mu) = P\left\{N \in (-\infty, -N_{1-\alpha})\right\}$
  - Mit $N \sim N\left(\frac{\mu-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}, 1\right)$ erhält man hier

$$\begin{aligned} P\left\{N \in (-\infty, -N_{1-\alpha})\right\} &= P\left\{N < -N_{1-\alpha}\right\} \\ &= \Phi\left(-N_{1-\alpha} - \frac{\mu-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right) \end{aligned}$$

Beispiel für Gütefunktionen

Linksseitiger Test ($\mu_0 = 500$) zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.10$