Universität des Saarlandes
Lehrstab Statistik
Dr. Martin Becker

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

6. Übungsblatt zur Vorlesung Schließende Statistik WS 2016/17

Aufgabe 19

Ein Hersteller von Waschmaschinen hat ein neues Modell entwickelt. Es werde angenommen, dass der Wasserverbrauch $Y[l]$ dieses neuen Modells als eine normalverteilte Zufallsvariable mit unbekanntem Erwartungswert μ und bekannter Varianz $\sigma^2 > 0$ betrachtet werden kann. Nach Auskunft des Herstellers beträgt der mittlere Wasserverbrauch μ dieses neuen Modells höchstens $\mu_0 = 40$ [l]. Mit einem Test zum Signifikanzniveau α wird $H_0 : \mu \leq \mu_0$ gegen $H_1 : \mu > \mu_0$ anhand einer einfachen Stichprobe zu Y vom Umfang n geprüft.

(a) Welcher Test ist in der geschilderten Problemstellung geeignet?

(b) Leiten Sie zunächst allgemein die Gütefunktion $G(\mu)$ des Tests her und berechnen Sie dann speziell für $n = 16$, $\sigma^2 = 1.2^2$, $\alpha = 0.05$ den Wert der Gütefunktion an den Stellen $\mu = 39.7$ und $\mu = 41.2$.

(c) Wie groß ist in der Situation von Teil (b) die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art, wenn tatsächlich $\mu = 39.7$ gilt, und wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art, wenn $\mu = 41.2$ gilt?

(d) Führen Sie den in Teil (b) festgelegten Test auf Basis der Stichprobenrealisation

$$\overline{x} = \frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16} x_i = 40.11 \text{ [l]}$$

aus der Ziehung einer einfachen Stichprobe vom Umfang 16 durch. Fassen Sie das Ergebnis auch in einem Antwortsatz zusammen.

Aufgabe 20

Eine Großbäckerei backt u. a. auch Brötchen und liefert sie an die Lebensmitteleinzelhändler mit dem Hinweis aus, dass das Gewicht Y eines Brötchens durchschnittlich mindestens 50 [g] betrage. Ein Lebensmittelhändler wog daraufhin 25 Brötchen und erhielt aufgrund der Stichprobenrealisation $(x_1, ..., x_{25})$ vom Umfang $n = 25$ den folgenden durchschnittlichen Wert:

$$\overline{x} = \frac{1}{25}\sum_{i=1}^{25} x_i = 49.4 \text{ [g]}$$

Es werde angenommen, dass das Gewicht Y als eine $N(\mu, 1.5^2)$-verteilte Zufallsvariable angesehen werden kann und $(X_1, ..., X_{25})$ eine einfache Stichprobe zu Y mit der obigen Realisation ist.

(a) Testen Sie zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ die Hypothese, dass die Angabe der Großbäckerei korrekt ist, gegen die Alternative, dass das angegebene Gewicht unterschritten wird. Formulieren Sie das Ergebnis in einem Antwortsatz.

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird man sich bei der Durchführung des in Teil (a) verwendeten Tests für die Korrektheit der von der Großbäckerei angegebenen Schranke für das Mindestgewicht entscheiden, obwohl das tatsächliche Durchschnittsgewicht nur $\mu = 49$ [g] beträgt?

(c) Wie viele Brötchen muss der Lebensmittelhändler in seine Stichprobe aufnehmen, um bei tatsächlichen Durchschnittsgewichten von höchstens 49 [g] die Verletzung der Nullhypothese auch mit mindestens 99% Wahrscheinlichkeit zu erkennen?

Aufgabe 21

Für den Erwartungswert μ einer normalverteilten Grundgesamtheit mit bekannter Varianz $\sigma^2 = 1$ soll ein Gauß-Test von $H_0 : \mu \leq 0.10$ gegen $H_1 : \mu > 0.10$ zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ mit einer einfachen Stichprobe vom Umfang $n = 100$ durchgeführt werden. Weiterhin sei $G(\mu)$ die zugehörige Gütefunktion.
Bewerten Sie den Wahrheitsgehalt der folgenden Aussagen:

		wahr	falsch
1.	Wenn für den Erwartungswert μ tatsächlich $\mu = 0.10$ gilt, dann verringert man die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art, indem man den Stichprobenumfang auf $n = 400$ erhöht.	☐	☐
2.	Wenn der Erwartungswert μ tatsächlich 0.11 beträgt, dann begeht man mit der Annahme der Nullhypothese $H_0 : \mu \leq 0.10$ einen Fehler 2. Art.	☐	☐
3.	Die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art ist für den obigen Test unabhängig vom Stichprobenumfang n.	☐	☐
4.	Für die Gütefunktion $G(\mu)$ gilt: $G(\mu) \leq \alpha$ für alle $\mu \leq 0.10$.	☐	☐
5.	Wird die Nullhypothese auf einem Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ angenommen, dann wird sie auch auf einem Signifikanzniveau $\alpha = 0.01$ angenommen.	☐	☐
6.	Die Summe der Wahrscheinlichkeiten für den Fehler 1. Art und 2. Art ergibt immer 1.	☐	☐
7.	Das Signifikanzniveau stellt die maximale Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art dar.	☐	☐
8.	Für die Wahrscheinlichkeit $\beta(\mu)$ des Fehlers 2. Art gilt: $\beta(\mu) = 1 - G(\mu)$ für alle $\mu > 0.10$.	☐	☐
9.	$G(\mu)$ ist monoton fallend auf $\mathbb{R}$.	☐	☐