Universität des Saarlandes
Lehrstab Statistik
Dr. Martin Becker

4. Übungsblatt zum Wiederholungskurs
Schließende Statistik SS 2017

Aufgabe 15

Bei der Herstellung von Weizenbrötchen sei aus langjähriger Erfahrung bekannt, dass die verwendete Maschine Teig-Rohlinge herstellt, deren Gewicht eine Varianz von $2^2 = 4[g^2]$ hat. Nach einer Inventur hat der Hersteller den Verdacht, dass die Justierung der Maschine fehlerhaft ist und der tatsächliche Mittelwert für das Gewicht der Teig-Rohlinge von dem eingestellten und gewünschten Sollwert von $28[g]$ abweicht. Dies soll mit einem statistischen Test überprüft werden. Hierzu werden der Produktion 9 Teig-Rohlinge entnommen, deren gemessene Gewichte

$$27.75, 29.37, 27.33, 32.19, 29.66, 27.36, 29.97, 30.48, 30.15$$

als Realisation einer einfachen Stichprobe vom Umfang 9 zum annahmegemäß $N(\mu, 2^2[g^2])$-verteilten Gewicht betrachtet werden kann.

(a) Testen Sie zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$, ob der Verdacht der Herstellerfirma bestätigt werden kann. Fassen Sie das Ergebnis des Tests in einem Antwortsatz zusammen.

(b) Stellen Sie die Gütefunktion $G(\mu)$ des Tests auf. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art, falls $\mu = 30[g]$ beträgt?

Aufgabe 16

Auf Grundlage der Realisation $x_1, \ldots, x_{100}$ einer einfachen Stichprobe $X_1, \ldots, X_{100}$ vom Umfang $n = 100$ zu einer mit Varianz $\sigma^2 = 1.5^2$ verteilten Zufallsvariablen Y soll mit einem geeigneten Test zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ entschieden werden, ob für den Erwartungswert $\mu := \mathrm{E}(Y)$ der Verteilung von Y die Nullhypothese $H_0 : \mu = 100$ verletzt ist.

(a) Welcher Test ist in der beschriebenen Situation geeignet? Ist der Test unter den angegebenen Voraussetzungen exakt oder nur näherungsweise durchzuführen?

(b) Wie groß muss die (betragsmäßige) Abweichung zwischen $\overline{x} = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} x_i$ und 100 mindestens ausfallen, damit der Test die Nullhypothese ablehnt?

(c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird die Verletzung der Nullhypothese erkannt, wenn der tatsächliche Erwartungswert der Verteilung $\mu = 100.15$ beträgt?

Aufgabe 17

Der durchschnittliche CO-Ausstoß Y eines bestimmten PKW-Typs (in [Volumen %]) beträgt nach Auskunft des Herstellers 1.0 [Volumen %]. Um diese Angabe zu prüfen, untersuchte der TÜV 100 Autos diesen Typs und ermittelte aufgrund der gemessenen Werte x_i, $i = 1, \ldots, 100$ folgenden durchschnittlichen Wert:

$$\overline{x} = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} x_i = 1.1 \text{ [Volumen\%]}.$$

Es werde angenommen, dass der Ausstoß Y an CO als eine $N(\mu, 0.4^2)$-verteilte Zufallsvariable angesehen werden kann und $(X_1, \ldots, X_{100})$ eine einfache Stichprobe zu Y mit der Realisation $(x_1, \ldots, x_{100})$ ist.

(a) Testen Sie zum Niveau $\alpha = 0.01$ die Hypothese, dass die Angaben des Herstellers stimmen, gegen die Alternative, dass der mittlere Ausstoß an CO höher ist. Fassen Sie das Testergebnis auch in einem Antwortsatz zusammen.

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art, falls $\mu = 1.1$ [Volumen %] gilt?

Aufgabe 18

Eine bestimmte Filiale einer Lebensmittelkette hatte in der Vergangenheit einen mittleren Umsatz von 10000 Euro pro Tag. Um zu überprüfen, ob dieser mittlere Umsatz nach Eröffnung einer in der Nähe gelegenen Filiale eines Konkurrenten gesunken ist, wurden über 25 Tage die täglichen Umsätze der (eigenen) Filiale ermittelt. Es ergab sich ein durchschnittlicher Umsatz von 9900 Euro. Man geht davon aus, dass der Umsatz Y normalverteilt ist mit einer Standardabweichung σ von 500 Euro, und dass die Realisation einer einfachen Stichprobe zu Y zu dem erhaltenen Durchschnittswert geführt hat.

(a) Testen Sie zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.10$, ob der mittlere Umsatz der eigenen Filiale gesunken ist. Geben Sie das Ergebnis des Tests auch in einem Antwortsatz wieder.

(b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 1. Art, falls für den tatsächlichen mittleren Umsatz $\mu = 10050$ gilt.

Aufgabe 19

Eine Lebensmittelkette erwirtschaftete im 2. Halbjahr 2001 einen durchschnittlichen Umsatz von $\mu_0 = 1.80$ Mio. Euro pro Filiale. Ziel einer nachfolgenden Werbekampagne war es, den Umsatz im 1. Halbjahr 2002 zu steigern. Genaue Zahlen liegen zur Zeit noch nicht vor, aber in einer Stichprobe aus $n = 64$ zufällig ausgewählten Filialen ergab sich ein Stichprobenmittel von 2.00 Mio. Euro. Man geht davon aus, dass der durchschnittliche Umsatz Y pro Filiale normalverteilt ist. Die Standardabweichung σ beträgt erfahrungsgemäß 0.40 Mio. Euro.

(a) Der Geschäftsführer will nun testen, ob sich der Umsatz im 1. Halbjahr 2002 im Vergleich zum 2. Halbjahr 2001 wirklich erhöht hat. Wie lauten Null- und Gegenhypothese?

(b) **Markieren Sie jeweils mit einem Kreuz pro Aussage im betreffenden Kästchen, ob die unten stehenden Aussagen wahr oder falsch sind.**

		wahr	falsch
1.	Steigt die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art, dann steigt die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art ebenfalls.		
2.	Wird die Nullhypothese auf einem Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ verworfen, dann wird sie auch auf einem Signifikanzniveau $\alpha = 0.01$ verworfen.		
3.	Die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art ist unabhängig vom Stichprobenumfang.		
4.	Der Wert der Gütefunktion $G(\mu)$ an der Stelle μ_0 ist stets α.		