

2. Zusatzübungsblatt zur Vorlesung
Deskriptive Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung SS 2021

Aufgabe 1 (2 + 2 + 3 = 7 Punkte)

Bei der Herstellung von Tapetenrollen tritt mit einer Wahrscheinlichkeit von 2% ein Fehler beim Zuschnitt der Rolle auf, mit einer Wahrscheinlichkeit von 3% ein Fehler beim Färben der Rolle und mit einer Wahrscheinlichkeit von 1% sowohl ein Fehler beim Zuschnitt als auch ein Fehler beim Färben. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

- (a) mindestens einer der beiden Fehler,
- (b) ein Fehler beim Färben der Rolle, aber kein Fehler beim Zuschnitt der Rolle,
- (c) genau einer der beiden Fehler

auftritt.

Aufgabe 2 (7 Punkte)

Bei einem Würfelspiel werden 5 (faire) Würfel gleichzeitig geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dabei ein „Full House“, also eine Kombination aus drei Würfeln gleicher Punktzahl und einem weiteren Paar Würfel gleicher (aber von der Punktzahl der anderen drei Würfel verschiedenen) Punktzahl, zu würfeln?

Hinweis: Achten Sie darauf, für die Modellierung des Zufallsexperiments einen Laplaceschen Wahrscheinlichkeitsraum zu verwenden.

Aufgabe 3 (4 + 2 = 6 Punkte)

Ein Formel-1-Rennfahrer erreicht erfahrungsgemäß mit einer Wahrscheinlichkeit von 40% im Qualifying die Pole-Position. Bei einem Start von der Pole-Position gewinnt er mit einer Wahrscheinlichkeit von 70% das Rennen, beim Start von einer anderen Position nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 20%.

- (a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit siegt der Formel-1-Rennfahrer bei einem Rennen?
- (b) Der Formel-1-Rennfahrer hat ein Rennen gewonnen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er dieses Rennen auf der Pole-Position begonnen?

Aufgabe 4 (3 + 2 + 5 + 2 + 3 = 15 Punkte)

Die Verteilung einer diskreten Zufallsvariablen X sei durch die folgende Wahrscheinlichkeitsfunktion gegeben:

x_i	1	2	3	4	5
$p_X(x_i)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{3}$

- Geben Sie die Verteilungsfunktion F_X von X an.
- Berechnen Sie $P(\{X \leq 3\})$ und $P(\{X \geq 3\})$.
- Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X .
- Ist X symmetrisch um ihren Erwartungswert verteilt? Begründen Sie Ihre Antwort!
- Geben Sie ein unteres Quartil, einen Median sowie ein oberes Quartil von X an.

Aufgabe 5 (5 + 2 + 12 + 1 + 5 + 3 + 2 = 30 Punkte)

Die Verteilung einer stetigen Zufallsvariablen X sei durch die folgende Dichtefunktion gegeben:

$$f_X(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{für } 1 \leq x < 2 \\ x - 2 & \text{für } 2 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von X .
- Berechnen Sie $P(\{X < \frac{3}{2}\})$ sowie $P(\{X > 2\})$.
- Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz von X .
- Ist X symmetrisch um ihren Erwartungswert verteilt (ohne Begründung)?
- Bestimmen Sie einen Median sowie ein oberes Quartil von X .
- Bestimmen Sie eine Dichtefunktion von $Y := 3 \cdot X - 2$.
- Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz von $Y := 3 \cdot X - 2$.

Aufgabe 6 (2 + 3 + 3 + 4 = 12 Punkte)

Eine umfangreiche Erhebung der Abfüllmengen einer speziellen Abfüllanlage für Getränkeflaschen ergab, dass sich die abgefüllten Mengen als Realisationen einer normalverteilten Zufallsvariablen X (Angaben in [ml]) auffassen lassen mit $X \sim N(700, 4^2)$.

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die abgefüllte Menge 704 [ml] überschreitet?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die abgefüllte Menge zwischen 690 [ml] und 698 [ml] liegt?
- Bestimmen Sie ein 0.90-Quantil der Abfüllmenge.
- Ermitteln Sie den zum Erwartungswert symmetrischen Bereich, in dem sich die Abfüllmengen mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% realisieren.

Hinweis: Verwenden Sie zur Lösung der Aufgabe die Tabelle zur Standardnormalverteilung auf Seite 3!

Tabelle zur Standardnormalverteilung

$$F_{N(0,1)}(x) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

$$\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$$

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998