

Inhaltsverzeichnis

(Ausschnitt)

6 Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume

- Laplacesche Wahrscheinlichkeitsräume
- Kombinatorik
- Allgemeine diskrete Wahrscheinlichkeitsräume

Laplacesche Wahrscheinlichkeitsräume II

- Das **Laplacesche Wahrscheinlichkeitsmaß** P ergibt sich dann als:

$$P : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}; P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

- Wahrscheinlichkeit $P(A)$ eines Ereignisses A ist also der Quotient

$$\frac{\text{Anzahl der im Ereignis } A \text{ enthaltenen Ergebnisse}}{\text{Anzahl aller möglichen Ergebnisse}}$$

bzw.

$$\frac{\text{Anzahl der (für Ereignis } A \text{) günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der (insgesamt) möglichen Fälle}}$$

- Einzige Schwierigkeit: **Zählen!**

Laplacesche Wahrscheinlichkeitsräume I

- Einfachster Fall für (Ω, \mathcal{F}, P) (wie in Würfel-Beispiel):
 - ▶ Ω endlich,
 - ▶ Eintritt aller Ergebnisse $\omega \in \Omega$ gleichwahrscheinlich.
- Wahrscheinlichkeitsräume mit dieser Eigenschaft heißen **Laplacesche Wahrscheinlichkeitsräume**.
- Als σ -Algebra \mathcal{F} kann stets $\mathcal{P}(\Omega)$ angenommen werden. Insbesondere ist also jede beliebige Teilmenge von Ω ein Ereignis, dessen Eintrittswahrscheinlichkeit berechnet werden kann.

Kombinatorik

- Disziplin, die sich mit „Zählen“ beschäftigt: **Kombinatorik**
- Verwendung allgemeiner Prinzipien und Modelle als Hilfestellung zum Zählen in konkreten Anwendungen.

Satz 6.1 (Additionsprinzip, Multiplikationsprinzip)

Sei $r \in \mathbb{N}$, seien M_1, M_2, \dots, M_r (jeweils) endliche Mengen.

- ▶ Ist $M_i \cap M_j = \emptyset$ für alle $i \neq j$, dann gilt das **Additionsprinzip**

$$|M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_r| = |M_1| + |M_2| + \dots + |M_r|.$$

- ▶ Mit $M_1 \times M_2 \times \dots \times M_r := \{(m_1, \dots, m_r) \mid m_1 \in M_1, \dots, m_r \in M_r\}$ gilt das **Multiplikationsprinzip**

$$|M_1 \times M_2 \times \dots \times M_r| = |M_1| \cdot |M_2| \cdot \dots \cdot |M_r|$$

und im Fall $M = M_1 = M_2 = \dots = M_r$ mit $M^r := \underbrace{M \times M \times \dots \times M}_{r\text{-mal}}$ spezieller

$$|M^r| = |M|^r.$$

Definition 6.1 (Fakultät, Binomialkoeffizient)

- 1 Mit $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ sei die Menge der natürlichen Zahlen einschließlich Null bezeichnet.
- 2 Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ definiert man die Zahl $n! \in \mathbb{N}$ (gelesen „**n-Fakultät**“) rekursiv durch

- $0! := 1$ und
- $(n+1)! := (n+1) \cdot n!$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

- 3 Für $n, r \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq r \leq n$ definiert man die Zahl $(n)_r$ (gelesen „**n tief r**“) durch

$$(n)_r := \frac{n!}{(n-r)!} = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-r+1).$$

- 4 Für $n, r \in \mathbb{N}_0$ und $0 \leq r \leq n$ definiert man den **Binomialkoeffizienten** $\binom{n}{r}$ (gelesen „**n über r**“) durch

$$\binom{n}{r} := \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}.$$

Modelle zum Zählen II

- **Alternatives Modell:**
Wie viele Möglichkeiten gibt es, r Murmeln in n unterscheidbare (z. B. von 1 bis n nummerierte) Schubladen zu verteilen.
Achtung: Auch als weiteres Urnenmodell (Verteilen von r Kugeln auf n Urnen) geläufig!
- Varianten:
 - Sind (auch) die Murmeln unterscheidbar?
 - Dürfen mehrere Murmeln pro Schublade (Mehrfachbelegungen) vorhanden sein?
- Beide Modelle entsprechen sich (einschließlich ihrer Varianten)!
- Im Folgenden (zur Vereinfachung der Darstellung):
Identifizieren von endlichen Mengen der Mächtigkeit n mit der Menge $\mathbb{N}_n := \{1, 2, \dots, n\}$ der ersten n natürlichen Zahlen.

Modelle zum Zählen I

- Gebräuchliches (Hilfs-)Modell zum Zählen: **Urnenmodell:**
Wie viele Möglichkeiten gibt es, r mal aus einer Urne mit n unterscheidbaren (z.B. von 1 bis n nummerierten) Kugeln zu ziehen?
- Varianten:
 - Ist die Reihenfolge der Ziehungen relevant?
 - Wird die Kugel nach jeder Ziehung wieder in die Urne zurückgelegt?

Variante I

„geordnete Probe (Variation) mit Wiederholung“

- Ziehen **mit Zurücklegen** und **mit** Berücksichtigung der **Reihenfolge**.
Für jede der r Ziehungen n Möglichkeiten, **Multiplikationsprinzip** anwenden.

- Anzahl der Möglichkeiten:

$${}^w_n V_r := \underbrace{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_{r \text{ Faktoren}} = n^r$$

- Formale Darstellung aller Möglichkeiten:

$$\{(m_1, \dots, m_r) \mid m_1, \dots, m_r \in \mathbb{N}_n\} = \mathbb{N}_n^r$$

- gleichbedeutend: Verteilen von **unterscheidbaren** Murmeln **mit** Zulassung von **Mehrfachbelegungen**

Variante II

„geordnete Probe (Variation) ohne Wiederholung“

- Ziehen **ohne Zurücklegen** und **mit** Berücksichtigung der **Reihenfolge**.
Für erste Ziehung n Möglichkeiten, für zweite $n - 1$, ..., für r -te Ziehung $n - r + 1$ Möglichkeiten, Multiplikationsprinzip anwenden.
- Anzahl der Möglichkeiten:

$${}_n V_r := n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - r + 1) = \frac{n!}{(n - r)!} = (n)_r$$

- Formale Darstellung aller Möglichkeiten:

$$\{(m_1, \dots, m_r) \in \mathbb{N}_n^r \mid m_i \neq m_j \text{ für } i \neq j, 1 \leq i, j \leq r\}$$

- gleichbedeutend: Verteilen von **unterscheidbaren** Murmeln **ohne** Zulassung von **Mehrfachbelegungen**
- **Spezialfall:** $n = r$
 - ↪ $n!$ verschiedene Möglichkeiten
 - ▶ entspricht (Anzahl der) möglichen Anordnungen (**Permutationen**) von n unterscheidbaren Kugeln bzw. n unterscheidbaren Murmeln

Variante IV

„ungeordnete Probe (Kombination) mit Wiederholung“

- Ziehen **mit Zurücklegen** und **ohne** Berücksichtigung der **Reihenfolge**.
Verständnis schwieriger!
Vorstellung: Erstelle „Strichliste“ mit r Strichen, verteilt auf n Felder (eines für jede Kugel) ↪ r Striche zwischen $n - 1$ „Feldbegrenzungen“. Anzahl Möglichkeiten entspricht Anzahl der Möglichkeiten, die r Striche in der „Reihung“ der $n - 1 + r$ Striche&Feldbegrenzungen zu positionieren.
- Anzahl der Möglichkeiten:

$${}_n C_r := \binom{n + r - 1}{r} = \frac{(n + r - 1)!}{r!(n - 1)!} = \frac{(n + r - 1) \cdot (n + r - 2) \cdot \dots \cdot n}{r \cdot (r - 1) \cdot \dots \cdot 1}$$

- Formale Darstellung aller Möglichkeiten:

$$\{(m_1, \dots, m_r) \in \mathbb{N}_n^r \mid m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_r\}$$

- gleichbedeutend: Verteilen von **nicht unterscheidbaren** Murmeln **mit** Zulassung von **Mehrfachbelegungen**
- **Achtung:** Üblicherweise **nicht** geeignet als Ω in Laplaceschen Wahrscheinlichkeitsräumen, da die verschiedenen Möglichkeiten bei üblichen Ziehungsvorgängen nicht alle gleichwahrscheinlich sind!

Variante III

„ungeordnete Probe (Kombination) ohne Wiederholung“

- Ziehen **ohne Zurücklegen** und **ohne** Berücksichtigung der **Reihenfolge**.
*Wie in Variante 2: Für erste Ziehung n Möglichkeiten, für zweite $n - 1$, ..., für r -te Ziehung $n - r + 1$ Möglichkeiten, Multiplikationsprinzip anwenden; **aber:** je $r!$ Möglichkeiten unterscheiden sich nur durch die (nicht zu berücksichtigende!) Reihenfolge.*
- Anzahl der Möglichkeiten:

$${}_n C_r := \frac{n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - r + 1)}{r \cdot (r - 1) \cdot \dots \cdot 1} = \frac{n!}{r!(n - r)!} = \binom{n}{r}$$

- Formale Darstellung aller Möglichkeiten:

$$\{(m_1, \dots, m_r) \in \mathbb{N}_n^r \mid m_1 < m_2 < \dots < m_r\}$$

- gleichbedeutend: Verteilen von **nicht unterscheidbaren** Murmeln **ohne** Zulassung von **Mehrfachbelegungen**
- Häufig Anwendung bei *gleichzeitigem* Ziehen von r aus n Objekten bzw. simultane Auswahl von r aus n Plätzen; Anzahl der Möglichkeiten entspricht Anzahl r -elementiger Teilmengen aus n -elementiger Menge.

Übersicht der Varianten I–IV

vgl. Ulrich Krenzel, Einführung in die W.-Theorie und Statistik, 7. Aufl., Vieweg, Wiesbaden, 2003

r unterscheidbare Kugeln aus Urne mit n (unterscheidbaren) Kugeln	mit Zurücklegen	ohne Zurücklegen	
mit Berücksichtigung der Reihenfolge	Variante I ${}_n V_r = n^r$	Variante II ${}_n V_r = (n)_r$	unterscheidbare Murmeln
ohne Berücksichtigung der Reihenfolge	Variante IV ${}_n C_r = \binom{n + r - 1}{r}$	Variante III ${}_n C_r = \binom{n}{r}$	nicht unterscheidbare Murmeln
	mit Mehrfachbesetzung	ohne Mehrfachbesetzung	r Murmeln in n unterscheidbare Schubladen

Bemerkungen

- Wird ohne Zurücklegen gezogen, muss natürlich $r \leq n$ gefordert werden!
(Es können insgesamt nicht mehr Kugeln entnommen werden, als zu Beginn in der Urne enthalten waren.)
- Werden **alle** Kugeln ohne Zurücklegen unter Berücksichtigung der Reihenfolge entnommen, wird häufig folgende Verallgemeinerung betrachtet:
 - ▶ Nicht alle n Kugeln sind unterscheidbar (durchnummeriert).
 - ▶ Es gibt $m < n$ (unterscheidbare) Gruppen von Kugeln, die jeweils n_1, n_2, \dots, n_m **nicht** unterscheidbare Kugeln umfassen (mit $n = \sum_{i=1}^m n_i$).
 - ▶ Da es jeweils $n_1!, n_2!, \dots, n_m!$ nicht unterscheidbare Anordnungen der Kugeln innerhalb der Gruppen gibt, reduziert sich die Anzahl der insgesamt vorhandenen Möglichkeiten von ${}_n P := {}_n V_n = n!$ auf

$${}_n P_{n_1, n_2, \dots, n_m} := \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_m!}.$$

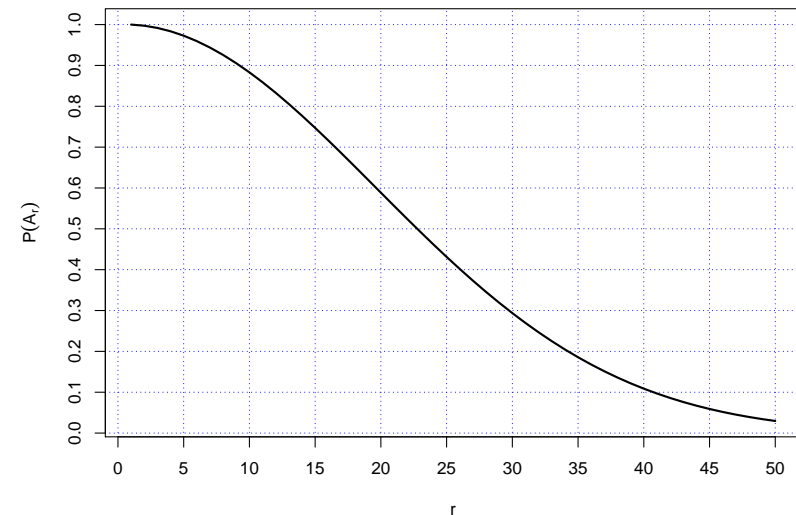
- ▶ Typische Anwendung: Buchstabenanordnungen bei „Scrabble“
- ▶ Nenner von ${}_n P_{n_1, n_2, \dots, n_m}$ liefert Anzahl der Möglichkeiten für jeweils nicht unterscheidbare Anordnungen.

Beispiele

- **Lottospiel „6 aus 49“** (ohne Berücksichtigung einer Zusatzzahl)
 - ▶ Interessierendes Ereignis A : (Genau) 3 „Richtige“
 - ▶ $|\Omega| = \binom{49}{6} = 13983816$, $|A| = \binom{6}{3} \cdot \binom{43}{3} = 246820$
 - ⇒ $P(A) = \frac{\binom{6}{3} \cdot \binom{43}{3}}{\binom{49}{6}} = 0.01765 = 1.765\%$
- Anzahl der Möglichkeiten bei **zweimaligem Würfelwurf**
 - ▶ wenn die Reihenfolge irrelevant (z.B. bei gleichzeitigem Werfen) ist:
 - $|\Omega| = \binom{6+2-1}{2} = 21$
 - Vorsicht: nicht alle Ergebnisse gleichwahrscheinlich!**
 - ▶ wenn die Reihenfolge relevant ist:
 - $|\Omega| = 6^2 = 36$
- **Geburtstage**
Zusammensetzung der Geburtstage (ohne Jahreszahl; Vernachlässigung von Schaltjahren) bei r Personen (mit Reihenfolgeberücksichtigung)
 - ▶ Interessierendes Ereignis A_r : alle r Personen haben verschiedene Geburtstage
 - ▶ $|\Omega_r| = 365^r$, $|A_r| = (365)_r$ für $r \leq 365$, $|A_r| = 0$ sonst.
 - ⇒ $P(A_r) = \frac{(365)_r}{365^r}$ für $r \leq 365$, $P(A_r) = 0$ sonst.

- Anwendung der Kombinatorik in Laplaceschen Wahrscheinlichkeitsräumen:
 - ▶ Auswahl eines geeigneten Ergebnisraums Ω mit **gleichwahrscheinlichen** Ausgängen des Zufallsexperiments.
 - ▶ Bestimmen von $|\Omega|$ mit kombinatorischen Hilfsmitteln.
 - ▶ Bestimmen von $|A|$ für interessierende Ereignisse $A \subseteq \Omega$ mit kombinatorischen Hilfsmitteln.
- Häufig gibt es nicht **die** richtige Lösung, sondern mehrere, da oft mehrere Modelle (mehr oder weniger) geeignet sind.
- Wird aber beispielsweise Ω unter Berücksichtigung der Ziehungsreihenfolge konstruiert, obwohl die Reihenfolge für das interessierende Ereignis A unwichtig ist, müssen unterschiedliche mögliche Anordnungen bei der Konstruktion von A ebenfalls berücksichtigt werden!
- Trotz vorhandener (und nützlicher) Modelle:
 - Richtiges Zählen hat häufig „Knobelcharacter“, stures Einsetzen in Formeln selten ausreichend, Mitdenken erforderlich!*

Geburtstagsbeispiel



Allgemeine diskrete Wahrscheinlichkeitsräume I

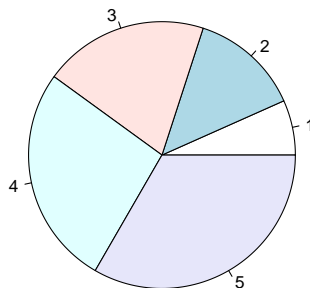
- Verallgemeinerung von Laplaceschen Wahrscheinlichkeitsräumen:
Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume
- Ω endlich (mit $|\Omega| = n$) oder abzählbar unendlich.
- Nach wie vor: Jeder Teilmenge von Ω soll eine Wahrscheinlichkeit zugeordnet werden können, also $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.
- Damit: Jedem Ergebnis kann Wahrscheinlichkeit zugeordnet werden.
- **Aber:**
Ergebnisse (auch für endliches Ω) nicht mehr (zwingend) gleichwahrscheinlich.

Beispiel I

- **„Glücksrad“** mit folgendem Aufbau:
 n Segmente, nummeriert von 1 bis n , deren Größe proportional zur Nummer ist (und die das Rad vollständig ausfüllen).
 - ▶ $\Omega = \{1, \dots, n\}$
 - ▶ Mit $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$ erhält man für die Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$p : \Omega \rightarrow [0, 1]; p(\omega) = \frac{\omega}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2\omega}{n(n+1)}$$

- Beispiel für $n = 5$:



Allgemeine diskrete Wahrscheinlichkeitsräume II

Definition 6.2 (Diskreter Wahrscheinlichkeitsraum)

Sei $\Omega \neq \emptyset$ endlich oder abzählbar unendlich und $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Sei $p : \Omega \rightarrow [0, 1]$ eine Abbildung mit $p(\omega) \geq 0$ für alle $\omega \in \Omega$ und $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$. Dann heißen das durch

$$P : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}; P(A) := \sum_{\omega \in A} p(\omega)$$

definierte Wahrscheinlichkeitsmaß sowie der Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) **diskret**, p heißt auch **Wahrscheinlichkeitsfunktion**.

- Ein Laplacescher Wahrscheinlichkeitsraum ist also ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum mit $p : \Omega \rightarrow [0, 1]; p(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}$.

Beispiel II

- **Münze** (mit „Wappen“ und „Zahl“) solange werfen, bis **zum ersten Mal „Zahl“** zu sehen ist:
Mögliche Ergebnisse: $\{Z, WZ, WWZ, WWWZ, \dots\}$, im Folgenden repräsentiert durch Anzahl der Würfe (insgesamt).

- ▶ $\Omega = \mathbb{N}$
- ▶ Wahrscheinlichkeitsfunktion (bei „fairer“ Münze)

$$p : \Omega \rightarrow [0, 1]; p(\omega) = \left(\frac{1}{2}\right)^\omega = \frac{1}{2^\omega}$$

- Wahrscheinlichkeit, höchstens n Würfe zu benötigen:

$$P(\{1, \dots, n\}) = \sum_{\omega=1}^n p(\omega) = \sum_{\omega=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^\omega = \frac{\frac{1}{2} \cdot (1 - (\frac{1}{2})^n)}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Hier verwendet: Geometrische Summenformel $\sum_{i=1}^n q^i = \frac{q \cdot (1 - q^n)}{1 - q}$ (für $q \neq 1$)