

# Inhaltsverzeichnis

(Ausschnitt)

- 6 Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume
  - Laplacesche Wahrscheinlichkeitsräume
  - Kombinatorik
  - Allgemeine diskrete Wahrscheinlichkeitsräume

## Laplacesche Wahrscheinlichkeitsräume I

- Einfachster Fall für  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  (wie in Würfel-Beispiel):
  - ▶  $\Omega$  endlich,
  - ▶ Eintritt aller Ergebnisse  $\omega \in \Omega$  gleichwahrscheinlich.
- Wahrscheinlichkeitsräume mit dieser Eigenschaft heißen **Laplacesche Wahrscheinlichkeitsräume**.
- Als  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{F}$  kann stets  $\mathcal{P}(\Omega)$  angenommen werden. Insbesondere ist also jede beliebige Teilmenge von  $\Omega$  ein Ereignis, dessen Eintrittswahrscheinlichkeit berechnet werden kann.

## Laplacesche Wahrscheinlichkeitsräume II

- Das **Laplacesche Wahrscheinlichkeitsmaß**  $P$  ergibt sich dann als:

$$P : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}; P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

- Wahrscheinlichkeit  $P(A)$  eines Ereignisses  $A$  ist also der Quotient

$$\frac{\text{Anzahl der im Ereignis } A \text{ enthaltenen Ergebnisse}}{\text{Anzahl aller möglichen Ergebnisse}}$$

bzw.

$$\frac{\text{Anzahl der (für Ereignis } A \text{) günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der (insgesamt) möglichen Fälle}} .$$

- Einzige Schwierigkeit: **Zählen!**

## Kombinatorik

- Disziplin, die sich mit „Zählen“ beschäftigt: **Kombinatorik**
- Verwendung allgemeiner Prinzipien und Modelle als Hilfestellung zum Zählen in konkreten Anwendungen.

### Satz 6.1 (Additionsprinzip, Multiplikationsprinzip)

Sei  $r \in \mathbb{N}$ , seien  $M_1, M_2, \dots, M_r$  (jeweils) endliche Mengen.

- Ist  $M_i \cap M_j = \emptyset$  für alle  $i \neq j$ , dann gilt das **Additionsprinzip**

$$|M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_r| = |M_1| + |M_2| + \dots + |M_r| .$$

- Mit  $M_1 \times M_2 \times \dots \times M_r := \{(m_1, \dots, m_r) \mid m_1 \in M_1, \dots, m_r \in M_r\}$  gilt das **Multiplikationsprinzip**

$$|M_1 \times M_2 \times \dots \times M_r| = |M_1| \cdot |M_2| \cdot \dots \cdot |M_r|$$

und im Fall  $M = M_1 = M_2 = \dots = M_r$  mit  $M^r := \underbrace{M \times M \times \dots \times M}_{r\text{-mal}}$  spezieller

$$|M^r| = |M|^r .$$

## Definition 6.1 (Fakultät, Binomialkoeffizient)

- 1 Mit  $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$  sei die Menge der natürlichen Zahlen einschließlich Null bezeichnet.
- 2 Für jedes  $n \in \mathbb{N}_0$  definiert man die Zahl  $n! \in \mathbb{N}$  (gelesen „**n-Fakultät**“) rekursiv durch
  - ▶  $0! := 1$  und
  - ▶  $(n+1)! := (n+1) \cdot n!$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ .

- 3 Für  $n, r \in \mathbb{N}_0$  mit  $0 \leq r \leq n$  definiert man die Zahl  $(n)_r$  (gelesen „**n tief r**“) durch

$$(n)_r := \frac{n!}{(n-r)!} = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-r+1).$$

- 4 Für  $n, r \in \mathbb{N}_0$  und  $0 \leq r \leq n$  definiert man den **Binomialkoeffizienten**  $\binom{n}{r}$  (gelesen „**n über r**“) durch

$$\binom{n}{r} := \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}.$$

## Modelle zum Zählen I

- Gebräuchliches (Hilfs-)Modell zum Zählen: **Urnenmodell**:  
*Wie viele Möglichkeiten gibt es,  $r$  mal aus einer Urne mit  $n$  unterscheidbaren (z.B. von 1 bis  $n$  nummerierten) Kugeln zu ziehen?*
- Varianten:
  - ▶ Ist die Reihenfolge der Ziehungen relevant?
  - ▶ Wird die Kugel nach jeder Ziehung wieder in die Urne zurückgelegt?

# Modelle zum Zählen II

- *Alternatives Modell:*  
Wie viele Möglichkeiten gibt es,  $r$  Murmeln in  $n$  unterscheidbare (z. B. von 1 bis  $n$  nummerierte) Schubladen zu verteilen.  
*Achtung: Auch als weiteres Urnenmodell (Verteilen von  $r$  Kugeln auf  $n$  Urnen) geläufig!*
- Varianten:
  - ▶ Sind (auch) die Murmeln unterscheidbar?
  - ▶ Dürfen mehrere Murmeln pro Schublade (Mehrfachbelegungen) vorhanden sein?
- Beide Modelle entsprechen sich (einschließlich ihrer Varianten)!
- Im Folgenden (zur Vereinfachung der Darstellung):  
Identifizieren von endlichen Mengen der Mächtigkeit  $n$  mit der Menge  $\mathbb{N}_n := \{1, 2, \dots, n\}$  der ersten  $n$  natürlichen Zahlen.

## Variante I

„geordnete Probe (Variation) mit Wiederholung“

- Ziehen **mit Zurücklegen** und **mit** Berücksichtigung der **Reihenfolge**.  
Für jede der  $r$  Ziehungen  $n$  Möglichkeiten, Multiplikationsprinzip anwenden.
- Anzahl der Möglichkeiten:

$${}^w_n V_r := \underbrace{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_{r \text{ Faktoren}} = n^r$$

- Formale Darstellung aller Möglichkeiten:

$$\{(m_1, \dots, m_r) \mid m_1, \dots, m_r \in \mathbb{N}_n\} = \mathbb{N}_n^r$$

- gleichbedeutend: Verteilen von **unterscheidbaren** Murmeln **mit** Zulassung von **Mehrfachbelegungen**

## Variante II

„geordnete Probe (Variation) ohne Wiederholung“

- Ziehen **ohne Zurücklegen** und **mit** Berücksichtigung der **Reihenfolge**.  
Für erste Ziehung  $n$  Möglichkeiten, für zweite  $n - 1$ , ..., für  $r$ -te Ziehung  $n - r + 1$  Möglichkeiten, Multiplikationsprinzip anwenden.

- Anzahl der Möglichkeiten:

$${}_n V_r := n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - r + 1) = \frac{n!}{(n - r)!} = (n)_r$$

- Formale Darstellung aller Möglichkeiten:

$$\{(m_1, \dots, m_r) \in \mathbb{N}_n^r \mid m_i \neq m_j \text{ für } i \neq j, 1 \leq i, j \leq r\}$$

- gleichbedeutend: Verteilen von **unterscheidbaren** Murmeln **ohne** Zulassung von **Mehrfachbelegungen**
- **Spezialfall:**  $n = r$ 
  - ↪  $n!$  verschiedene Möglichkeiten
  - ▶ entspricht (Anzahl der) möglichen Anordnungen (**Permutationen**) von  $n$  unterscheidbaren Kugeln bzw.  $n$  unterscheidbaren Murmeln

## Variante III

„ungeordnete Probe (Kombination) ohne Wiederholung“

- Ziehen **ohne Zurücklegen** und **ohne** Berücksichtigung der **Reihenfolge**.  
Wie in Variante 2: Für erste Ziehung  $n$  Möglichkeiten, für zweite  $n - 1$ , ..., für  $r$ -te Ziehung  $n - r + 1$  Möglichkeiten, Multiplikationsprinzip anwenden;  
**aber:** je  $r!$  Möglichkeiten unterscheiden sich nur durch die (nicht zu berücksichtigende!) Reihenfolge.

- Anzahl der Möglichkeiten:

$${}_n C_r := \frac{n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - r + 1)}{r \cdot (r - 1) \cdot \dots \cdot 1} = \frac{n!}{r!(n - r)!} = \binom{n}{r}$$

- Formale Darstellung aller Möglichkeiten:

$$\{(m_1, \dots, m_r) \in \mathbb{N}_n^r \mid m_1 < m_2 < \dots < m_r\}$$

- gleichbedeutend: Verteilen von **nicht unterscheidbaren** Murmeln **ohne** Zulassung von **Mehrfachbelegungen**
- Häufig Anwendung bei *gleichzeitigem* Ziehen von  $r$  aus  $n$  Objekten bzw. simultane Auswahl von  $r$  aus  $n$  Plätzen; Anzahl der Möglichkeiten entspricht Anzahl  $r$ -elementiger Teilmengen aus  $n$ -elementiger Menge.

## Variante IV

„ungeordnete Probe (Kombination) mit Wiederholung“

- Ziehen **mit Zurücklegen** und **ohne** Berücksichtigung der **Reihenfolge**.

*Verständnis schwieriger!*

*Vorstellung: Erstelle „Strichliste“ mit  $r$  Strichen, verteilt auf  $n$  Felder (eines für jede Kugel)  $\rightsquigarrow r$  Striche zwischen  $n - 1$  „Feldbegrenzungen“. Anzahl Möglichkeiten entspricht Anzahl der Möglichkeiten, die  $r$  Striche in der „Reihung“ der  $n - 1 + r$  Striche & Feldbegrenzungen zu positionieren.*

- Anzahl der Möglichkeiten:

$${}^w_n C_r := \binom{n+r-1}{r} = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!} = \frac{(n+r-1) \cdot (n+r-2) \cdot \dots \cdot n}{r \cdot (r-1) \cdot \dots \cdot 1}$$

- Formale Darstellung aller Möglichkeiten:

$$\{(m_1, \dots, m_r) \in \mathbb{N}_n^r \mid m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_r\}$$

- gleichbedeutend: Verteilen von **nicht unterscheidbaren** Murmeln **mit** Zulassung von **Mehrfachbelegungen**
- **Achtung:** Üblicherweise **nicht** geeignet als  $\Omega$  in Laplaceschen Wahrscheinlichkeitsräumen, da die verschiedenen Möglichkeiten bei üblichen Ziehungsvorgängen nicht alle gleichwahrscheinlich sind!

## Übersicht der Varianten I–IV

vgl. Ulrich Krenkel, Einführung in die W.-Theorie und Statistik, 7. Aufl., Vieweg, Wiesbaden, 2003

$r$ unterscheidbare Kugeln aus Urne mit $n$ (unterscheidbaren) Kugeln	<b>mit</b> Zurücklegen	<b>ohne</b> Zurücklegen	
<b>mit</b> Berücksichtigung der Reihenfolge	Variante I ${}^w_n V_r = n^r$	Variante II ${}_n V_r = (n)_r$	<b>unterscheidbare</b> Murmeln
<b>ohne</b> Berücksichtigung der Reihenfolge	Variante IV ${}^w_n C_r = \binom{n+r-1}{r}$	Variante III ${}_n C_r = \binom{n}{r}$	<b>nicht unterscheidbare</b> Murmeln
	<b>mit</b> Mehrfachbesetzung	<b>ohne</b> Mehrfachbesetzung	$r$ Murmeln in $n$ unterscheidbare Schubladen

## Bemerkungen

- Wird ohne Zurücklegen gezogen, muss natürlich  $r \leq n$  gefordert werden!  
(Es können insgesamt nicht mehr Kugeln entnommen werden, als zu Beginn in der Urne enthalten waren.)
- Werden **alle** Kugeln ohne Zurücklegen unter Berücksichtigung der Reihenfolge entnommen, wird häufig folgende Verallgemeinerung betrachtet:
  - ▶ Nicht alle  $n$  Kugeln sind unterscheidbar (durchnummeriert).
  - ▶ Es gibt  $m < n$  (unterscheidbare) Gruppen von Kugeln, die jeweils  $n_1, n_2, \dots, n_m$  **nicht** unterscheidbare Kugeln umfassen (mit  $n = \sum_{i=1}^m n_i$ ).
  - ▶ Da es jeweils  $n_1!, n_2!, \dots, n_m!$  nicht unterscheidbare Anordnungen der Kugeln innerhalb der Gruppen gibt, reduziert sich die Anzahl der insgesamt vorhandenen Möglichkeiten von  ${}_n P := {}_n V_n = n!$  auf

$${}_n P_{n_1, n_2, \dots, n_m} := \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_m!} .$$

- ▶ Typische Anwendung: Buchstabenanordnungen bei „Scrabble“
- ▶ Nenner von  ${}_n P_{n_1, n_2, \dots, n_m}$  liefert Anzahl der Möglichkeiten für jeweils nicht unterscheidbare Anordnungen.

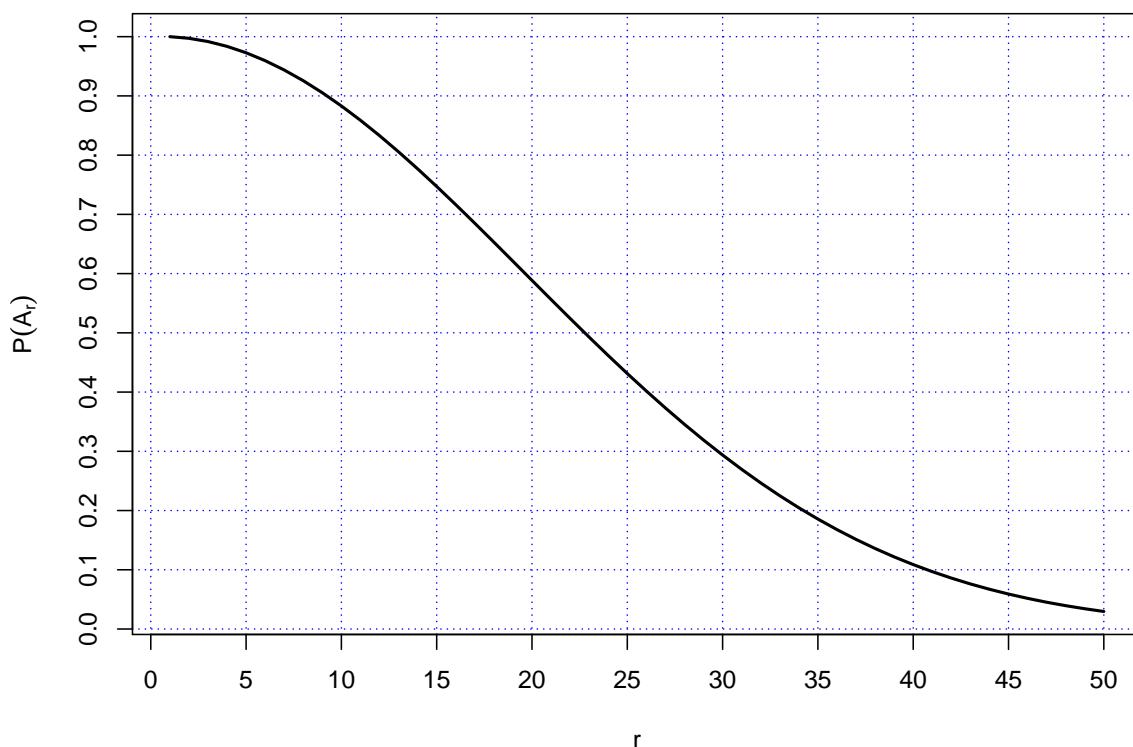
- Anwendung der Kombinatorik in Laplaceschen Wahrscheinlichkeitsräumen:
  - ▶ Auswahl eines geeigneten Ergebnisraums  $\Omega$  mit **gleichwahrscheinlichen** Ausgängen des Zufallsexperiments.
  - ▶ Bestimmen von  $|\Omega|$  mit kombinatorischen Hilfsmitteln.
  - ▶ Bestimmen von  $|A|$  für interessierende Ereignisse  $A \subseteq \Omega$  mit kombinatorischen Hilfsmitteln.
- Häufig gibt es nicht **die** richtige Lösung, sondern mehrere, da oft mehrere Modelle (mehr oder weniger) geeignet sind.
- Wird aber beispielsweise  $\Omega$  unter Berücksichtigung der Ziehungsreihenfolge konstruiert, obwohl die Reihenfolge für das interessierende Ereignis  $A$  unwichtig ist, müssen unterschiedliche mögliche Anordnungen bei der Konstruktion von  $A$  ebenfalls berücksichtigt werden!
- Trotz vorhandener (und nützlicher) Modelle:
 

*Richtiges Zählen hat häufig „Knobelcharacter“, stures Einsetzen in Formeln selten ausreichend, Mitdenken erforderlich!*

## Beispiele

- **Lottospiel „6 aus 49“** (ohne Berücksichtigung einer Zusatzzahl)
  - ▶ Interessierendes Ereignis  $A$ : (Genau) 3 „Richtige“
  - ▶  $|\Omega| = \binom{49}{6} = 13983816$ ,  $|A| = \binom{6}{3} \cdot \binom{43}{3} = 246820$
  - ⇒  $P(A) = \frac{\binom{6}{3} \cdot \binom{43}{3}}{\binom{49}{6}} = 0.01765 = 1.765\%$
- Anzahl der Möglichkeiten bei **zweimaligem Würfelwurf**
  - ▶ wenn die Reihenfolge irrelevant (z.B. bei gleichzeitigem Werfen) ist:
    - $|\Omega| = \binom{6+2-1}{2} = 21$
    - Vorsicht: nicht alle Ergebnisse gleichwahrscheinlich!**
  - ▶ wenn die Reihenfolge relevant ist:
    - $|\Omega| = 6^2 = 36$
- **Geburtstage**  
 Zusammensetzung der Geburtstage (ohne Jahreszahl; Vernachlässigung von Schaltjahren) bei  $r$  Personen (mit Reihenfolgeberücksichtigung)
  - ▶ Interessierendes Ereignis  $A_r$ : alle  $r$  Personen haben verschiedene Geburtstage
  - ▶  $|\Omega_r| = 365^r$ ,  $|A_r| = (365)_r$  für  $r \leq 365$ ,  $|A_r| = 0$  sonst.
  - ⇒  $P(A_r) = \frac{(365)_r}{365^r}$  für  $r \leq 365$ ,  $P(A_r) = 0$  sonst.

### Geburtstagsbeispiel





# Allgemeine diskrete Wahrscheinlichkeitsräume I

- Verallgemeinerung von Laplaceschen Wahrscheinlichkeitsräumen:  
**Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume**
- $\Omega$  endlich (mit  $|\Omega| = n$ ) oder abzählbar unendlich.
- Nach wie vor: Jeder Teilmenge von  $\Omega$  soll eine Wahrscheinlichkeit zugeordnet werden können, also  $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ .
- Damit: Jedem Ergebnis kann Wahrscheinlichkeit zugeordnet werden.
- **Aber:**  
Ergebnisse (auch für endliches  $\Omega$ ) nicht mehr (zwingend) gleichwahrscheinlich.

# Allgemeine diskrete Wahrscheinlichkeitsräume II

## Definition 6.2 (Diskreter Wahrscheinlichkeitsraum)

Sei  $\Omega \neq \emptyset$  endlich oder abzählbar unendlich und  $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ . Sei  $p : \Omega \rightarrow [0, 1]$  eine Abbildung mit  $p(\omega) \geq 0$  für alle  $\omega \in \Omega$  und  $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$ . Dann heißen das durch

$$P : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}; P(A) := \sum_{\omega \in A} p(\omega)$$

definierte Wahrscheinlichkeitsmaß sowie der Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  **diskret**,  $p$  heißt auch **Wahrscheinlichkeitsfunktion**.

- Ein Laplacescher Wahrscheinlichkeitsraum ist also ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum mit  $p : \Omega \rightarrow [0, 1]; p(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}$ .

## Beispiel I

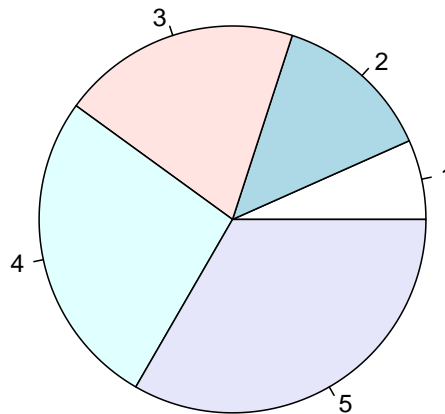
- **„Glücksrad“** mit folgendem Aufbau:  
 $n$  Segmente, nummeriert von 1 bis  $n$ , deren Größe proportional zur Nummer ist (und die das Rad vollständig ausfüllen).

- ▶  $\Omega = \{1, \dots, n\}$

- ▶ Mit  $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$  erhält man für die Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$p : \Omega \rightarrow [0, 1]; p(\omega) = \frac{\omega}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2\omega}{n(n+1)}$$

- Beispiel für  $n = 5$ :



## Beispiel II

- **Münze** (mit „Wappen“ und „Zahl“) solange werfen, bis **zum ersten Mal „Zahl“** zu sehen ist:  
 Mögliche Ergebnisse:  $\{Z, WZ, WWZ, WWWZ, \dots\}$ , im Folgenden repräsentiert durch Anzahl der Würfe (insgesamt).

- ▶  $\Omega = \mathbb{N}$

- ▶ Wahrscheinlichkeitsfunktion (bei „fairer“ Münze)

$$p : \Omega \rightarrow [0, 1]; p(\omega) = \left(\frac{1}{2}\right)^\omega = \frac{1}{2^\omega}$$

- Wahrscheinlichkeit, höchstens  $n$  Würfe zu benötigen:

$$P(\{1, \dots, n\}) = \sum_{\omega=1}^n p(\omega) = \sum_{\omega=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^\omega = \frac{\frac{1}{2} \cdot (1 - (\frac{1}{2})^n)}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Hier verwendet: Geometrische Summenformel  $\sum_{i=1}^n q^i = \frac{q \cdot (1 - q^n)}{1 - q}$  (für  $q \neq 1$ )

# Inhaltsverzeichnis

(Ausschnitt)

- 7 Bedingte Wahrscheinlichkeit und Unabhängigkeit
  - Bedingte Wahrscheinlichkeiten
  - Stochastische Unabhängigkeit

## Bedingte Wahrscheinlichkeiten I

- Oft interessant: Eintrittswahrscheinlichkeit eines Ereignisses  $B$ , wenn schon bekannt ist, dass ein (anderes) Ereignis  $A$ , in diesem Zusammenhang auch **Bedingung** genannt, eingetreten ist.
- Beispiele:
  - ▶ Werfen eines Würfels:  
Wahrscheinlichkeit dafür, eine 2 gewürfelt zu haben, falls bekannt ist, dass eine ungerade Zahl gewürfelt wurde  $\rightsquigarrow 0$   
Wahrscheinlichkeit dafür, eine 3 oder 4 gewürfelt zu haben, falls bekannt ist, dass eine Zahl größer als 3 gewürfelt wurde  $\rightsquigarrow \frac{1}{3}$
  - ▶ Wahrscheinlichkeit, aus einer Urne mit 2 schwarzen und 2 weißen Kugeln bei Ziehung ohne Zurücklegen in der zweiten Ziehung eine weiße Kugel zu ziehen, wenn bekannt ist, dass in der ersten Ziehung eine schwarze Kugel gezogen wurde  $\rightsquigarrow \frac{2}{3}$
  - ▶ Wahrscheinlichkeit, dass man beim Poker-Spiel (Texas Hold'em) zum Ende des Spiels einen Vierling als höchstes Blatt hat, wenn man bereits ein Paar in der Starthand hält  $\rightsquigarrow 0.8424\%$

## Bedingte Wahrscheinlichkeiten II

- Offensichtlich sind diese Wahrscheinlichkeiten nur dann interessant, wenn das Ereignis  $A$  auch mit positiver Wahrscheinlichkeit eintritt.
- *Rückblick:*  
In deskriptiver Statistik: Begriff der *bedingten relativen Häufigkeiten*
  - ▶  $r(a_i|Y = b_j) := \frac{h_{ij}}{h_{\cdot j}} = \frac{r_{ij}}{r_{\cdot j}}$
  - ▶  $r(b_j|X = a_i) := \frac{h_{ij}}{h_{i\cdot}} = \frac{r_{ij}}{r_{i\cdot}}$
 für  $i \in \{1, \dots, k\}$  und  $j \in \{1, \dots, l\}$ .
- Analog zur Einschränkung der statistischen Masse bei bedingten relativen Häufigkeiten: Einschränkung von  $\Omega$  auf bedingendes Ereignis  $A$ .

## Bedingte Wahrscheinlichkeiten III

- Zur Ermittlung der bedingten Wahrscheinlichkeit, eine 3 oder 4 gewürfelt zu haben (Ereignis  $B = \{3, 4\}$ ), falls bekannt ist, dass eine Zahl größer als 3 gewürfelt wurde (Ereignis  $A = \{4, 5, 6\}$ ):
  - ▶ Berechnung der Wahrscheinlichkeit des gemeinsamen Eintretens der Bedingung  $A$  und des interessierenden Ereignisses  $B$ :  
 $P(A \cap B) = P(\{3, 4\} \cap \{4, 5, 6\}) = P(\{4\}) = \frac{1}{6}$
  - ▶ Berechnung der Wahrscheinlichkeit des Eintretens der Bedingung  $A$ :  
 $P(A) = P(\{4, 5, 6\}) = \frac{3}{6}$
  - ▶ Analog zum Fall relativer bedingter Häufigkeiten: Berechnung des Verhältnisses  $\frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}$ .

## Bedingte Wahrscheinlichkeiten IV

### Definition 7.1

Es seien  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $A, B \in \mathcal{F}$  mit  $P(A) > 0$ . Dann heißt

$$P(B|A) := \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

die **bedingte Wahrscheinlichkeit** von  $B$  unter der Bedingung  $A$ .

### Satz 7.1

Es seien  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $A \in \mathcal{F}$  mit  $P(A) > 0$ . Dann ist die Abbildung

$$P(\cdot | A) : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}; B \mapsto P(B|A)$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $\mathcal{F}$  gemäß Definition 5.4, also auch  $(\Omega, \mathcal{F}, P(\cdot | A))$  ein Wahrscheinlichkeitsraum.

## Bedingte Wahrscheinlichkeiten V

- **Wichtig:** Satz 7.1 gilt nur dann, wenn das bedingende Ereignis  $A$  festgehalten wird. Bei der Abbildung  $P(A|\cdot) : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$  handelt es sich im Allgemeinen **nicht** (und bei strenger Auslegung von Definition 7.1 sogar **nie**) um ein Wahrscheinlichkeitsmaß.
- Aus Definition 7.1 folgt unmittelbar

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) \quad (1)$$

für  $A, B \in \mathcal{F}$  mit  $P(A) > 0$ .

- Obwohl  $P(B|A)$  nur für  $P(A) > 0$  definiert ist, bietet es sich aus technischen Gründen an, Schreibweisen wie in Gleichung (1) auch für  $P(A) = 0$  zuzulassen. In diesem Fall sollen Produkte, in denen neben (eigentlich) nicht definierten bedingten Wahrscheinlichkeiten mindestens ein Faktor 0 auftritt, definitionsgemäß ebenfalls den Wert 0 annehmen.

## Bedingte Wahrscheinlichkeiten VI

- Mit dieser Konvention für Bedingungen mit Eintrittswahrscheinlichkeit 0 lässt sich durch wiederholtes Einsetzen von Gleichung (1) leicht der **Multiplikationssatz**

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

für  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$  herleiten.

- Mit dem Multiplikationssatz können insbesondere Wahrscheinlichkeiten in sogenannten Baumdiagrammen (für „mehrstufige“ Zufallsexperimente) ausgewertet werden.
- In vielen Anwendungen sind häufig vor allem bedingte Wahrscheinlichkeiten bekannt (bzw. werden als bekannt angenommen).
- Es ist nicht immer einfach, die Angabe bedingter Wahrscheinlichkeiten auch als solche zu erkennen!

## Bedingte Wahrscheinlichkeiten VII

- Beispiel:  
In einer kleinen Druckerei stehen 3 Druckmaschinen unterschiedlicher Kapazität zur Verfügung:
  - ▶ Maschine 1, mit der 50% aller Druckjobs gedruckt werden, produziert mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.1% ein fehlerhaftes Ergebnis,
  - ▶ Maschine 2, mit der 30% aller Druckjobs gedruckt werden, produziert mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.25% ein fehlerhaftes Ergebnis,
  - ▶ Maschine 3, mit der 20% aller Druckjobs gedruckt werden, produziert mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.5% ein fehlerhaftes Ergebnis.

Sind die interessierenden Ereignisse gegeben durch

- ▶  $M_i$ : Maschine  $i$  wird zur Produktion des Druckjobs eingesetzt ( $i \in \{1, 2, 3\}$ ),
- ▶  $F$ : Die Produktion des Druckjobs ist fehlerbehaftet,

so sind insgesamt bekannt:

$$\begin{array}{lll} P(M_1) = 0.5 & P(M_2) = 0.3 & P(M_3) = 0.2 \\ P(F|M_1) = 0.001 & P(F|M_2) = 0.0025 & P(F|M_3) = 0.005 \end{array}$$

## Bedingte Wahrscheinlichkeiten VIII

- In der Situation des Druckmaschinen-Beispiels interessiert man sich häufig für die *unbedingte* Wahrscheinlichkeit, einen fehlerhaften Druckjob zu erhalten, also für  $P(F)$ .
- Diese Wahrscheinlichkeit kann mit einer Kombination von Gleichung (1) auf Folie 174 und der letzten Rechenregel von Folie 148 berechnet werden:

### Satz 7.2 (Satz der totalen Wahrscheinlichkeit)

Es seien  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$  (für  $n \in \mathbb{N}$ ) eine Zerlegung von  $\Omega$ , es gelte also  $A_i \cap A_j = \emptyset$  für  $i \neq j$  und  $\bigcup_{j=1}^n A_j = \Omega$ . Für beliebige Ereignisse  $B \in \mathcal{F}$  gilt dann

$$P(B) = \sum_{j=1}^n P(B|A_j) \cdot P(A_j) .$$

## Bedingte Wahrscheinlichkeiten IX

- Im Druckmaschinen-Beispiel erhält man so:

$$\begin{aligned} P(F) &= P(F|M_1) \cdot P(M_1) + P(F|M_2) \cdot P(M_2) + P(F|M_3) \cdot P(M_3) \\ &= 0.001 \cdot 0.5 + 0.0025 \cdot 0.3 + 0.005 \cdot 0.2 \\ &= 0.00225 = 0.225\% \end{aligned}$$

- Die Wahrscheinlichkeit von  $A \cap B$  kann mit Hilfe bedingter Wahrscheinlichkeiten in zwei Varianten berechnet werden:

$$P(B|A) \cdot P(A) = P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$$

- Dies kann (bei Kenntnis der restlichen beteiligten Wahrscheinlichkeiten!) dazu benutzt werden, Bedingung und interessierendes Ereignis umzudrehen. Ist z.B.  $P(B|A)$  (sowie  $P(A)$  und  $P(B)$ ) gegeben, so erhält man  $P(A|B)$  durch

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)} .$$

## Bedingte Wahrscheinlichkeiten X

- Wird dabei die unbedingte Wahrscheinlichkeit  $P(B)$  mit dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit (Satz 7.2) berechnet, so erhält man:

### Satz 7.3 (Formel von Bayes)

Es seien  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$  (für  $n \in \mathbb{N}$ ) eine Zerlegung von  $\Omega$ , es gelte also  $A_i \cap A_j = \emptyset$  für  $i \neq j$  und  $\bigcup_{j=1}^n A_j = \Omega$ . Sei  $B \in \mathcal{F}$  ein weiteres Ereignis mit  $P(B) > 0$ . Dann gilt:

$$P(A_k|B) = \frac{P(B|A_k) \cdot P(A_k)}{\sum_{j=1}^n P(B|A_j) \cdot P(A_j)}, \quad k \in \{1, \dots, n\}$$

- Anwendung der Formel von Bayes im Druckmaschinen-Beispiel:  
**Frage:** Wenn eine Fehlproduktion aufgetreten ist, mit welchen Wahrscheinlichkeiten sind dann die verschiedenen Druckmaschinen für den Fehldruck „verantwortlich“?

## Bedingte Wahrscheinlichkeiten XI

- Es interessiert nun also  $P(M_i|F)$  für  $i \in \{1, 2, 3\}$ .
- Mit Formel von Bayes (ohne Verwendung des Zwischenergebnisses  $P(F)$ ):

$$\begin{aligned} P(M_1|F) &= \frac{P(F|M_1) \cdot P(M_1)}{\sum_{i=1}^3 P(F|M_i) \cdot P(M_i)} \\ &= \frac{0.001 \cdot 0.5}{0.001 \cdot 0.5 + 0.0025 \cdot 0.3 + 0.005 \cdot 0.2} = \frac{2}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(M_2|F) &= \frac{P(F|M_2) \cdot P(M_2)}{\sum_{i=1}^3 P(F|M_i) \cdot P(M_i)} \\ &= \frac{0.0025 \cdot 0.3}{0.001 \cdot 0.5 + 0.0025 \cdot 0.3 + 0.005 \cdot 0.2} = \frac{3}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(M_3|F) &= \frac{P(F|M_3) \cdot P(M_3)}{\sum_{i=1}^3 P(F|M_i) \cdot P(M_i)} \\ &= \frac{0.005 \cdot 0.2}{0.001 \cdot 0.5 + 0.0025 \cdot 0.3 + 0.005 \cdot 0.2} = \frac{4}{9} \end{aligned}$$



## Beispiel: Fehler bei bedingten Wahrscheinlichkeiten I

(aus Walter Krämer: Denkste!, Piper, München, 2000)

- Häufig (auch in den Medien!) ist der Fehler zu beobachten, dass das bedingende und das eigentlich interessierende Ereignis vertauscht werden.
- Beispiel (Schlagzeile in einer Ausgabe der ADAC-Motorwelt):

*Der Tod fährt mit!*

*Vier von zehn tödlich verunglückten Autofahrern trugen keinen Sicherheitsgurt!*

- Bezeichnet  $S$  das Ereignis „Sicherheitsgurt angelegt“ und  $T$  das Ereignis „Tödlicher Unfall“, so ist hier die Wahrscheinlichkeit  $P(\bar{S}|T) = 0.4$ , also die Wahrscheinlichkeit, keinen Sicherheitsgurt angelegt zu haben, falls man bei einem Unfall tödlich verunglückt ist, mit 40% angegeben.
- Was soll die Schlagzeile vermitteln?
  - ▶ Unwahrscheinlich: Anschnallen ist gefährlich, da 6 von 10 verunglückten Autofahrern einen Sicherheitsgurt trugen.
  - ▶ Wohl eher: Anschnallen ist nützlich!
- **Aber:** Zitierte Wahrscheinlichkeit ist absolut ungeeignet, um Nutzen des Anschnallens zu untermauern!

## Beispiel: Fehler bei bedingten Wahrscheinlichkeiten II

(aus Walter Krämer: Denkste!, Piper, München, 2000)

- Stattdessen interessant:  $P(T|\bar{S})$  vs.  $P(T|S)$   
(Wie stehen Wahrscheinlichkeiten, bei nicht angelegtem bzw. angelegtem Sicherheitsgurt tödlich zu verunglücken, zueinander?)
- Aus  $P(\bar{S}|T)$  kann Verhältnis  $\frac{P(T|\bar{S})}{P(T|S)}$  nur berechnet werden, falls die Wahrscheinlichkeit bekannt ist, mit der ein Autofahrer angeschnallt ist:

$$\begin{aligned}
 P(T|S) &= \frac{P(T \cap S)}{P(S)} = \frac{P(S|T) \cdot P(T)}{P(S)} \\
 P(T|\bar{S}) &= \frac{P(T \cap \bar{S})}{P(\bar{S})} = \frac{P(\bar{S}|T) \cdot P(T)}{P(\bar{S})} \\
 \Rightarrow \frac{P(T|\bar{S})}{P(T|S)} &= \frac{P(\bar{S}|T) \cdot P(S)}{P(\bar{S}) \cdot P(S|T)}
 \end{aligned}$$

- Für  $P(S) = 0.9$ :  $\frac{P(T|\bar{S})}{P(T|S)} = 6$ , also Risiko ohne Gurt 6 mal höher als mit Gurt.
- Für  $P(S) = 0.2$ :  $\frac{P(T|\bar{S})}{P(T|S)} = \frac{1}{6}$ , also Risiko ohne Gurt 6 mal niedriger als mit Gurt.