# Spezielle diskrete Verteilungen

- Im Folgenden: Vorstellung spezieller (parametrischer) **Verteilungsfamilien**, die häufig Verwendung finden.
- Häufige Verwendung ist dadurch begründet, dass diese Verteilungen in vielen verschiedenen Anwendungen anzutreffen sind bzw. die Zufallsabhängigkeit interessanter Größen geeignet modellieren.
- Parametrische Verteilungsfamilien sind Mengen von (ähnlichen) Verteilungen $Q_\theta$, deren Elemente sich nur durch die Ausprägung eines oder mehrerer **Verteilungsparameter** unterscheiden, d.h. die spezielle Verteilung hängt von einem Parameter oder einem Parametervektor $\theta$ ab, und zu jedem Parameter(vektor) gehört jeweils eine eigene Verteilung $Q_\theta$.
- Die Menge aller möglichen Parameter(vektoren) $\theta$, auch **Parameterraum** genannt, wird meist mit $\Theta$ bezeichnet. Die Verteilungsfamilie ist damit die Menge $\{Q_\theta \mid \theta \in \Theta\}$.
- Besitzt eine Zufallsvariable $X$ die Verteilung $Q_\theta$, so schreibt man auch kurz: $X \sim Q_\theta$.
- *Zunächst:* Vorstellung spezieller *diskreter* Verteilungen.





# Bernoulli-/Alternativverteilung

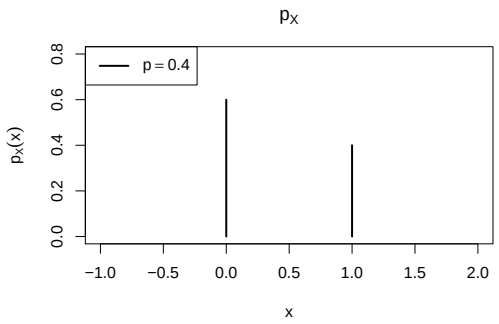
- Verwendung:
  - Modellierung eines Zufallsexperiments $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, in dem nur das Eintreten bzw. Nichteintreten eines einzigen Ereignisses $A$ von Interesse ist.
  - Eintreten des Ereignisses $A$ wird oft als „Erfolg“ interpretiert, Nichteintreten (bzw. Eintreten von $\overline{A}$) als „Misserfolg“.
  - Zufallsvariable soll im Erfolgsfall Wert 1 annehmen, im Misserfolgsfall Wert 0, es sei also
$$X(\omega) := \begin{cases} 1 & \text{falls } \omega \in A \\ 0 & \text{falls } \omega \in \overline{A} \end{cases}$$
  - Beispiel: Werfen eines fairen Würfels, Ereignis $A$: „6 gewürfelt“ mit $P(A) = \frac{1}{6}$.
- Verteilung von $X$ hängt damit *nur* von „Erfolgswahrscheinlichkeit“ $p := P(A)$ ab; $p$ ist also einziger Parameter der Verteilungsfamilie.
- Um triviale Fälle auszuschließen, betrachtet man nur Ereignisse mit $p \in (0, 1)$
- Der Träger der Verteilung ist dann $T(X) = \{0, 1\}$, die Punktwahrscheinlichkeiten sind $p_X(0) = 1 - p$ und $p_X(1) = p$.
- Symbolschreibweise für Bernoulli-Verteilung mit Parameter $p$: $B(1, p)$
- Ist $X$ also Bernoulli-verteilt mit Parameter $p$, so schreibt man $X \sim B(1, p)$.

**Bernoulli-/Alternativverteilung** $B(1,p)$

Parameter: $p \in (0,1)$

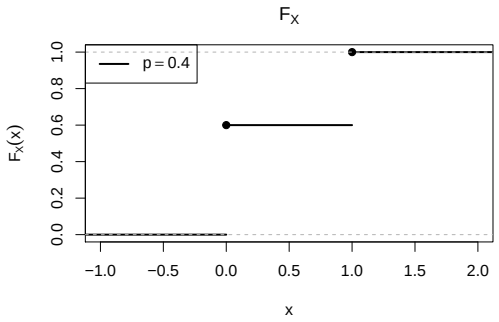
Träger: $T(X) = \{0,1\}$
Wahrscheinlichkeitsfunktion:

$$p_X(x) = \begin{cases} 1-p & \text{für } x = 0 \\ p & \text{für } x = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$




Verteilungsfunktion:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1-p & \text{für } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{für } x \ge 1 \end{cases}$$




Momente: $E(X) = p$ $\quad$ $\mathrm{Var}(X) = p \cdot (1-p)$

$\gamma(X) = \frac{1-2p}{\sqrt{p(1-p)}}$ $\quad$ $\kappa(X) = \frac{1-3p(1-p)}{p(1-p)}$





# Binomialverteilung

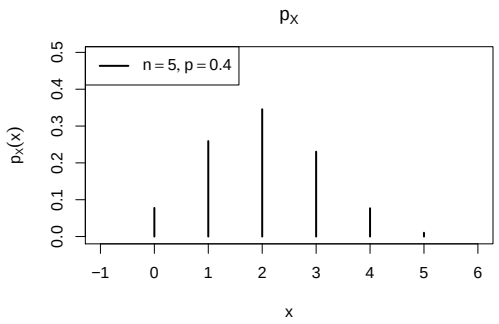
- Verallgemeinerung der Bernoulli-Verteilung
- Verwendung:
  - Modellierung der **unabhängigen, wiederholten** Durchführung eines Zufallsexperiments, in dem nur die **Häufigkeit** des Eintretens bzw. Nichteintretens eines Ereignisses $A$ interessiert („Bernoulli-Experiment“).
  - Eintreten des Ereignisses $A$ wird auch hier oft als „Erfolg“ interpretiert, Nichteintreten (bzw. Eintreten von $\overline{A}$) als „Misserfolg“.
  - Zufallsvariable $X$ soll die **Anzahl der Erfolge** bei einer vorgegebenen Anzahl von $n$ Wiederholungen des Experiments zählen.
  - Nimmt $X_i$ für $i \in \{1,\ldots,n\}$ im Erfolgsfall (für Durchführung $i$) den Wert 1 an, im Misserfolgsfall den Wert 0, dann gilt also $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$.
  - Beispiel: 5-faches Werfen eines fairen Würfels, Anzahl der Zahlen kleiner 3. $\rightsquigarrow n = 5, p = 1/3$.
- Verteilung von $X$ hängt damit *nur* von „Erfolgswahrscheinlichkeit“ $p := P(A)$ sowie der Anzahl der Durchführungen $n$ des Experiments ab.
- Um triviale Fälle auszuschließen, betrachtet man nur die Fälle $n \in \mathbb{N}$ und $p \in (0,1)$. Träger der Verteilung ist dann $T(X) = \{0,1,\ldots,n\}$.
- Symbolschreibweise für Binomialverteilung mit Parameter $n$ und $p$: $B(n,p)$
- Übereinstimmung mit Bernoulli-Verteilung (mit Parameter $p$) für $n = 1$.

**Binomialverteilung**
$B(n,p)$

Parameter:
$n \in \mathbb{N}, p \in (0,1)$

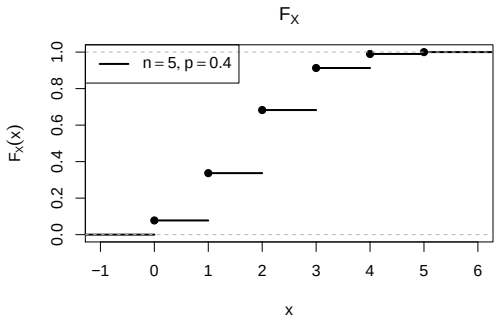
Träger: $T(X) = \{0, 1, \ldots, n\}$
Wahrscheinlichkeitsfunktion: $p_X(x)$

$$= \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & \text{für } x \in T(X) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$




Verteilungsfunktion:

$$F_X(x) = \sum_{\substack{x_i \in T(X) \\ x_i \leq x}} p_X(x_i)$$




Momente: $E(X) = n \cdot p$ $\quad$ $\mathrm{Var}(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$

$\gamma(X) = \frac{1-2p}{\sqrt{np(1-p)}}$ $\quad$ $\kappa(X) = \frac{1+(3n-6)p(1-p)}{np(1-p)}$





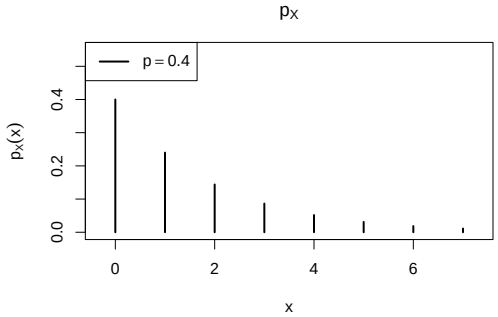
# Geometrische Verteilung

- Verwendung:
  - Modellierung der **unabhängigen, wiederholten** Durchführung eines Bernoulli-Experiments (nur das Eintreten bzw. Nichteintreten eines einzigen Ereignisses $A$ ist von Interesse), bis das Ereignis $A$ **zum ersten Mal** eintritt.
  - Zufallsvariable $X$ zählt **Anzahl der Misserfolge**, ausschließlich des (letzten) „erfolgreichen" Versuchs, bei dem Ereignis $A$ zum ersten Mal eintritt.
  - $X$ kann also nur Werte $x \in \mathbb{N}_0$ annehmen, man erhält die Realisation $x$ von $X$, wenn nach genau $x$ Misserfolgen (Nicht-Eintreten von $A$) in der $(x+1)$-ten Durchführung ein Erfolg (Eintreten von $A$) zu verzeichnen ist.
  - Ist $p := P(A)$ die „Erfolgswahrscheinlichkeit" des Bernoulli-Experiments, so gilt offensichtlich $P\{X = x\} = (1-p)^x \cdot p$ für alle $x \in \mathbb{N}_0$.
  - Beispiel (vgl. Folie 168): Anzahl des Auftretens von „Zahl" beim Werfen einer Münze („Wappen" oder „Zahl"), bis zum ersten Mal „Wappen" erscheint $\rightsquigarrow p = 1/2$ (bei fairer Münze).
- Verteilung von $X$ hängt damit *nur* von Erfolgswahrscheinlichkeit $p$ ab.
- Um triviale Fälle auszuschließen, betrachtet man nur den Fall $p \in (0,1)$. Träger der Verteilung ist dann $T(X) = \mathbb{N}_0 = \{0, 1, \ldots\}$.
- Symbolschreibweise für geometrische Verteilung mit Parameter $p$: $\mathrm{Geom}(p)$

**Geometrische Verteilung** | Parameter:
Geom($p$) | $p \in (0,1)$

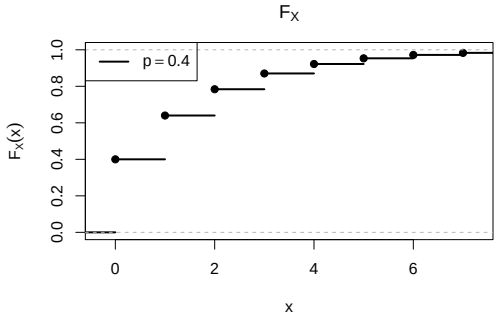
Träger: $T(X) = \mathbb{N}_0 = \{0, 1, \ldots\}$
Wahrscheinlichkeitsfunktion:

$$p_X(x) = \begin{cases} (1-p)^x \cdot p & \text{für } x \in T(X) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$




Verteilungsfunktion:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 - (1-p)^{\lfloor x \rfloor + 1} & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$




Momente: $E(X) = \frac{1-p}{p}$ $\quad$ $\mathrm{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$

$\gamma(X) = \frac{2-p}{\sqrt{1-p}}$ $\quad$ $\kappa(X) = \frac{p^2-9p+9}{1-p}$





# Poisson-Verteilung

- „Grenzverteilung“ der Binomialverteilung
- Verwendung:
  - Approximation einer $B(n,p)$-Verteilung, wenn $n$ (sehr) groß und $p$ (sehr) klein ist.
  - „Faustregeln“ zur Anwendung der Approximation:

$$n \geq 50, \qquad p \leq 0.1, \qquad n \cdot p \leq 10$$

  - Poisson-Verteilung hat einzigen Parameter $\lambda > 0$, der zur Approximation einer $B(n,p)$-Verteilung auf $\lambda = n \cdot p$ gesetzt wird.
- Träger von Poisson-verteilten Zufallsvariablen $X$: $T(X) = \mathbb{N}_0 = \{0, 1, \ldots\}$
- Wahrscheinlichkeitsfunktion für $x \in T(X)$: $p_X(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$, wobei $e = \exp(1)$ die Eulersche Zahl ist, also $e \approx 2.71828$.
- Gültigkeit der Approximation beruht auf Konvergenz der Punktwahrscheinlichkeiten. Es gilt nämlich für alle $x \in \mathbb{N}_0$:

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ p \to 0 \\ n \cdot p \to \lambda}} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$$

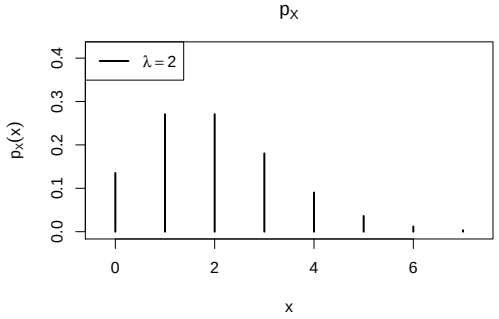
- Symbolschreibweise für Poisson-Verteilung mit Parameter $\lambda$: Pois($\lambda$)

**Poisson-Verteilung**
Pois($\lambda$)

Parameter:
$\lambda > 0$

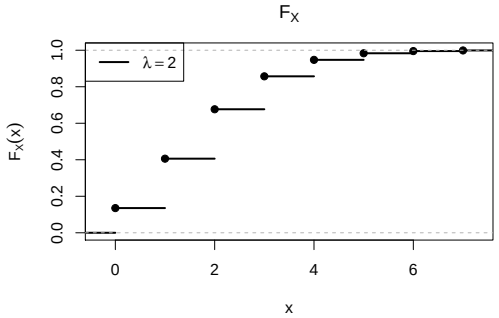
Träger: $T(X) = \mathbb{N}_0 = \{0, 1, \ldots\}$
Wahrscheinlichkeitsfunktion:

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} & \text{für } x \in T(X) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$




Verteilungsfunktion:

$$F_X(x) = \sum_{\substack{x_i \in T(X) \\ x_i \leq x}} p_X(x_i)$$




Momente:

$$\begin{aligned} E(X) &= \lambda & \mathrm{Var}(X) &= \lambda \\ \gamma(X) &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} & \kappa(X) &= 3 + \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$





# Spezielle stetige Verteilungen

- Nun: Vorstellung spezieller parametrischer Verteilungsfamilien von *stetigen* Verteilungen
- In Verallgemeinerung des **Trägers** diskreter Verteilungen:
  Träger $T(X)$ einer stetigen Verteilung als **„Bereich positiver Dichte“**.
- Wegen Möglichkeit, Dichtefunktionen abzuändern, etwas genauer:

$$\begin{aligned} T(X) := \{x \in \mathbb{R} \,|\, & \text{es gibt eine Dichtefunktion } f_X \text{ von } X \text{ und ein } \epsilon > 0 \\ & \text{mit } (f_X(t) > 0 \text{ für alle } t \in [x - \epsilon, x]) \\ & \text{oder } (f_X(t) > 0 \text{ für alle } t \in [x, x + \epsilon])\} \end{aligned}$$

# Stetige Gleichverteilung

- Einfachste stetige Verteilungsfamilie:
  **Stetige Gleichverteilung auf Intervall** $[a, b]$
- Modellierung einer stetigen Verteilung, in der alle Realisationen in einem Intervall $[a, b]$ als „gleichwahrscheinlich“ angenommen werden.
- Verteilung hängt von den beiden Parametern $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ ab.
- Dichtefunktion $f_X$ einer gleichverteilten Zufallsvariablen $X$ kann auf Intervall $[a, b]$ konstant zu $\frac{1}{b-a}$ gewählt werden.
- Träger der Verteilung: $T(X) = [a, b]$
- Symbolschreibweise für stetige Gleichverteilung auf $[a, b]$: $X \sim \text{Unif}(a, b)$



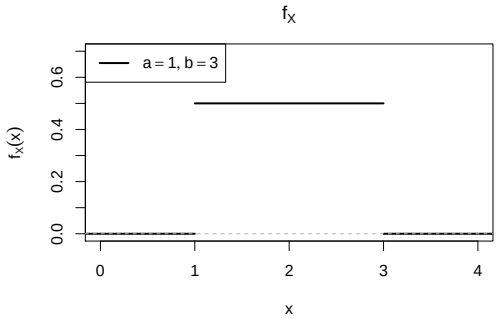


**Stetige Gleichverteilung**
$\text{Unif}(a, b)$

Parameter:
$a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$

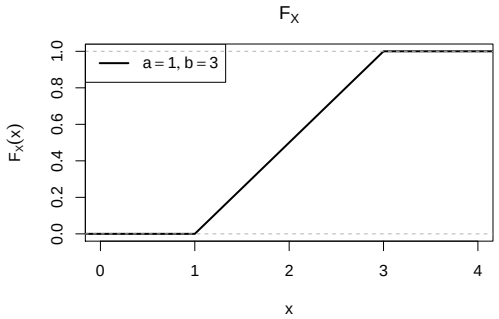
Träger: $T(X) = [a, b]$
Dichtefunktion: $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{für } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$




Verteilungsfunktion: $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{für } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{für } x > b \end{cases}$$




Momente: $E(X) = \frac{a+b}{2}$ $\quad$ $\text{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$
$\gamma(X) = 0$ $\quad$ $\kappa(X) = \frac{9}{5}$

# Normalverteilung

- Verteilung entsteht als Grenzverteilung bei Durchschnittsbildung vieler (unabhängiger) Zufallsvariablen (später mehr!) $\rightsquigarrow$ Einsatz für Näherungen
- Familie der Normalverteilungen hat Lageparameter $\mu \in \mathbb{R}$, der mit Erwartungswert übereinstimmt, und Streuungsparameter $\sigma^2 > 0$, der mit Varianz übereinstimmt, Standardabweichung ist dann $\sigma := +\sqrt{\sigma^2}$.
- Verteilungsfunktion von Normalverteilungen schwierig zu handhaben, Berechnung muss i.d.R. mit Software/Tabellen erfolgen.
- Wichtige Eigenschaft der Normalverteilungsfamilie:

  *Ist $X$ normalverteilt mit Parameter $\mu = 0$ und $\sigma^2 = 1$, dann ist $aX + b$ für $a, b \in \mathbb{R}$ normalverteilt mit Parameter $\mu = b$ und $\sigma^2 = a^2$.*

$\rightsquigarrow$ Zurückführung allgemeiner Normalverteilungen auf den Fall der **Standardnormalverteilung (Gauß-Verteilung)** mit Parameter $\mu = 0$ und $\sigma^2 = 1$, Tabellen/Algorithmen für Standardnormalverteilung damit einsetzbar.

- Dichtefunktion der Standardnormalverteilung: $\varphi$, Verteilungsfunktion: $\Phi$.
- Träger aller Normalverteilungen ist $T(X) = \mathbb{R}$.
- Symbolschreibweise für Normalverteilung mit Parameter $\mu, \sigma^2$: $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$

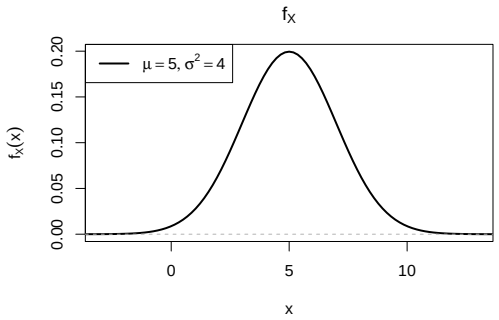




| **Normalverteilung** | Parameter: |
|---|---|
| $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ | $\mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$ |

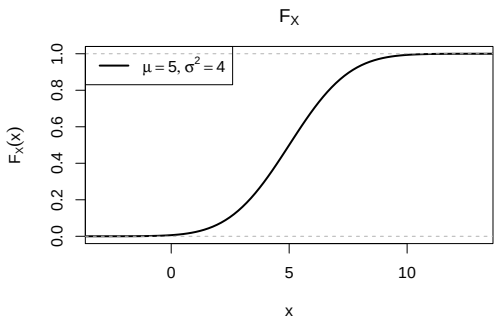
Träger: $T(X) = \mathbb{R}$
Dichtefunktion: $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$




Verteilungsfunktion:

$$F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; F_X(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$




Momente: $E(X) = \mu$ $\quad$ $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$
$\gamma(X) = 0$ $\quad$ $\kappa(X) = 3$

# Exponentialverteilung

- Beliebte Verteilungsfamilie zur Modellierung von **Wartezeiten**.
- Verteilung entsteht als Grenzverteilung der geometrischen Verteilung (Anzahl Fehlversuche vor erstem Erfolg bei wiederholter, unabhängiger Ausführung eines Bernoulli-Experiments) bei Erfolgswahrscheinlichkeit $p \to 0$.
- Da die Anzahl $X$ der benötigten Versuche für $p \to 0$ offensichtlich immer größere Werte annehmen wird, wird statt der *Anzahl* der benötigten Versuche die *Zeit* zur Durchführung der benötigten Versuche modelliert, und mit $p \to 0$ zugleich die *pro Zeiteinheit* durchgeführten Versuche $n$ des Bernoulli-Experiments so erhöht, dass $p \cdot n =: \lambda$ konstant bleibt.
- Einziger Parameter der resultierenden Exponentialverteilung ist damit die als „erwartete Anzahl von Erfolgen pro Zeiteinheit“ interpretierbare Größe $\lambda > 0$.
- Ist $X$ exponentialverteilt mit Parameter $\lambda$, so erhält man $F_X(x)$ aus der Verteilungsfunktion der geometrischen Verteilung für $x \geq 0$ gemäß

$$F_X(x) = \lim_{n\to\infty} 1 - \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n\cdot x} = \lim_{n\to\infty} 1 - \left(1 + \frac{-\lambda \cdot x}{n \cdot x}\right)^{n\cdot x} = 1 - e^{-\lambda x} \ .$$

- Träger der Exponentialverteilungsfamilie ist $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 0\}$.
- Symbolschreibweise für Exponentialverteilung mit Parameter $\lambda$: $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$

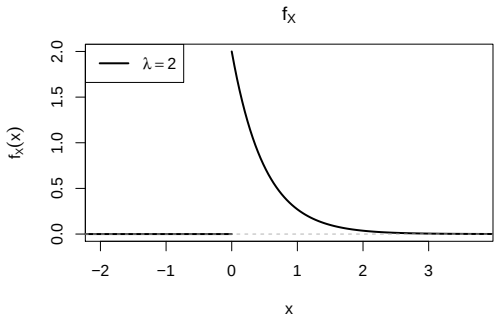




| **Exponentialverteilung** | Parameter: |
|---|---|
| $\mathrm{Exp}(\lambda)$ | $\lambda > 0$ |

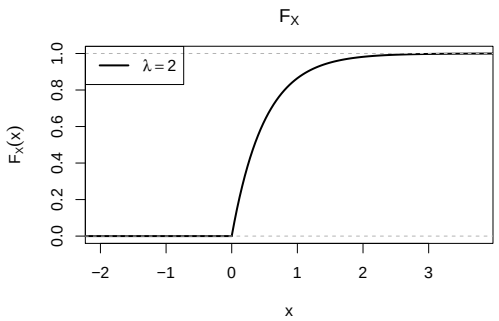
Träger: $T(X) = \mathbb{R}_+$
Dichtefunktion: $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x} & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$




Verteilungsfunktion: $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$




Momente: $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ $\quad$ $\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$
$\gamma(X) = 2$ $\quad$ $\kappa(X) = 9$

# Verwendung spezieller Verteilungen

- Übliche Vorgehensweise zur Berechnung von (Intervall-)Wahrscheinlichkeiten für Zufallsvariablen $X$: Verwendung der Verteilungsfunktion $F_X$
- Problem bei einigen der vorgestellten Verteilungen:
  *Verteilungsfunktion $F_X$ schlecht handhabbar bzw. nicht leicht auszuwerten!*
- Traditionelle Lösung des Problems: *Vertafelung* bzw. *Tabellierung* der Verteilungsfunktionswerte, Ablesen der Werte dann aus Tabellenwerken.
- Lösung nicht mehr zeitgemäß: (kostenlose) PC-Software für alle benötigten Verteilungsfunktionen verfügbar, zum Beispiel Statistik-Software **R** (`http://www.r-project.org`)
- **Aber:** In Klausur keine PCs verfügbar, daher dort Rückgriff auf Tabellen.
- Problematische Verteilungsfunktionen (bisher) sind die der Standardnormalverteilung, Binomialverteilung sowie Poisson-Verteilung.
- Tabellen oder Tabellenausschnitte zu diesen Verteilungen werden in Klausur (sofern benötigt) zur Verfügung gestellt!
- Auch das Bestimmen von Quantilen ist für diese Verteilungen nicht ohne Hilfsmittel möglich und muss mit Hilfe weiterer Tabellen oder auf Grundlage der tabellierten Verteilungsfunktionswerte erfolgen.





# Ausschnitt aus Tabelle für $\Phi(x)$

| | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.5000 | 0.5040 | 0.5080 | 0.5120 | 0.5160 | 0.5199 | 0.5239 | 0.5279 | 0.5319 | 0.5359 |
| 0.1 | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 | 0.5636 | 0.5675 | 0.5714 | 0.5753 |
| 0.2 | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5948 | 0.5987 | 0.6026 | 0.6064 | 0.6103 | 0.6141 |
| 0.3 | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 | 0.6406 | 0.6443 | 0.6480 | 0.6517 |
| 0.4 | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.6700 | 0.6736 | 0.6772 | 0.6808 | 0.6844 | 0.6879 |
| 0.5 | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.7190 | 0.7224 |
| 0.6 | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 | 0.7517 | 0.7549 |
| 0.7 | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7704 | 0.7734 | 0.7764 | 0.7794 | 0.7823 | 0.7852 |
| 0.8 | 0.7881 | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023 | 0.8051 | 0.8078 | 0.8106 | 0.8133 |
| 0.9 | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 | 0.8289 | 0.8315 | 0.8340 | 0.8365 | 0.8389 |
| 1.0 | 0.8413 | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 | 0.8599 | 0.8621 |
| 1.1 | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.8770 | 0.8790 | 0.8810 | 0.8830 |
| 1.2 | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944 | 0.8962 | 0.8980 | 0.8997 | 0.9015 |
| 1.3 | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9131 | 0.9147 | 0.9162 | 0.9177 |
| 1.4 | 0.9192 | 0.9207 | 0.9222 | 0.9236 | 0.9251 | 0.9265 | 0.9279 | 0.9292 | 0.9306 | 0.9319 |
| 1.5 | 0.9332 | 0.9345 | 0.9357 | 0.9370 | 0.9382 | 0.9394 | 0.9406 | 0.9418 | 0.9429 | 0.9441 |
| 1.6 | 0.9452 | 0.9463 | 0.9474 | 0.9484 | 0.9495 | 0.9505 | 0.9515 | 0.9525 | 0.9535 | 0.9545 |
| 1.7 | 0.9554 | 0.9564 | 0.9573 | 0.9582 | 0.9591 | 0.9599 | 0.9608 | 0.9616 | 0.9625 | 0.9633 |
| 1.8 | 0.9641 | 0.9649 | 0.9656 | 0.9664 | 0.9671 | 0.9678 | 0.9686 | 0.9693 | 0.9699 | 0.9706 |
| 1.9 | 0.9713 | 0.9719 | 0.9726 | 0.9732 | 0.9738 | 0.9744 | 0.9750 | 0.9756 | 0.9761 | 0.9767 |
| 2.0 | 0.9772 | 0.9778 | 0.9783 | 0.9788 | 0.9793 | 0.9798 | 0.9803 | 0.9808 | 0.9812 | 0.9817 |
| 2.1 | 0.9821 | 0.9826 | 0.9830 | 0.9834 | 0.9838 | 0.9842 | 0.9846 | 0.9850 | 0.9854 | 0.9857 |
| 2.2 | 0.9861 | 0.9864 | 0.9868 | 0.9871 | 0.9875 | 0.9878 | 0.9881 | 0.9884 | 0.9887 | 0.9890 |
| 2.3 | 0.9893 | 0.9896 | 0.9898 | 0.9901 | 0.9904 | 0.9906 | 0.9909 | 0.9911 | 0.9913 | 0.9916 |
| 2.4 | 0.9918 | 0.9920 | 0.9922 | 0.9925 | 0.9927 | 0.9929 | 0.9931 | 0.9932 | 0.9934 | 0.9936 |

# Ausschnitt aus Tabelle für $F_{B(n,p)}(x)$

| $n$ | $x$ | $p = 0.05$ | $p = 0.10$ | $p = 0.15$ | $p = 0.20$ | $p = 0.25$ | $p = 0.30$ | $p = 0.35$ | $p = 0.40$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0.9500 | 0.9000 | 0.8500 | 0.8000 | 0.7500 | 0.7000 | 0.6500 | 0.6000 |
| 1 | 1 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| 2 | 0 | 0.9025 | 0.8100 | 0.7225 | 0.6400 | 0.5625 | 0.4900 | 0.4225 | 0.3600 |
| 2 | 1 | 0.9975 | 0.9900 | 0.9775 | 0.9600 | 0.9375 | 0.9100 | 0.8775 | 0.8400 |
| 2 | 2 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| 3 | 0 | 0.8574 | 0.7290 | 0.6141 | 0.5120 | 0.4219 | 0.3430 | 0.2746 | 0.2160 |
| 3 | 1 | 0.9928 | 0.9720 | 0.9392 | 0.8960 | 0.8438 | 0.7840 | 0.7182 | 0.6480 |
| 3 | 2 | 0.9999 | 0.9990 | 0.9966 | 0.9920 | 0.9844 | 0.9730 | 0.9571 | 0.9360 |
| 3 | 3 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| 4 | 0 | 0.8145 | 0.6561 | 0.5220 | 0.4096 | 0.3164 | 0.2401 | 0.1785 | 0.1296 |
| 4 | 1 | 0.9860 | 0.9477 | 0.8905 | 0.8192 | 0.7383 | 0.6517 | 0.5630 | 0.4752 |
| 4 | 2 | 0.9995 | 0.9963 | 0.9880 | 0.9728 | 0.9492 | 0.9163 | 0.8735 | 0.8208 |
| 4 | 3 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9995 | 0.9984 | 0.9961 | 0.9919 | 0.9850 | 0.9744 |
| 4 | 4 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| 5 | 0 | 0.7738 | 0.5905 | 0.4437 | 0.3277 | 0.2373 | 0.1681 | 0.1160 | 0.0778 |
| 5 | 1 | 0.9774 | 0.9185 | 0.8352 | 0.7373 | 0.6328 | 0.5282 | 0.4284 | 0.3370 |
| 5 | 2 | 0.9988 | 0.9914 | 0.9734 | 0.9421 | 0.8965 | 0.8369 | 0.7648 | 0.6826 |
| 5 | 3 | 1.0000 | 0.9995 | 0.9978 | 0.9933 | 0.9844 | 0.9692 | 0.9460 | 0.9130 |
| 5 | 4 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9997 | 0.9990 | 0.9976 | 0.9947 | 0.9898 |
| 5 | 5 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| 6 | 0 | 0.7351 | 0.5314 | 0.3771 | 0.2621 | 0.1780 | 0.1176 | 0.0754 | 0.0467 |
| 6 | 1 | 0.9672 | 0.8857 | 0.7765 | 0.6554 | 0.5339 | 0.4202 | 0.3191 | 0.2333 |
| 6 | 2 | 0.9978 | 0.9842 | 0.9527 | 0.9011 | 0.8306 | 0.7443 | 0.6471 | 0.5443 |
| 6 | 3 | 0.9999 | 0.9987 | 0.9941 | 0.9830 | 0.9624 | 0.9295 | 0.8826 | 0.8208 |
| 6 | 4 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9996 | 0.9984 | 0.9954 | 0.9891 | 0.9777 | 0.9590 |
| 6 | 5 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9998 | 0.9993 | 0.9982 | 0.9959 |
| 6 | 6 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |





# **R**-Befehle für spezielle Verteilungen

- Verteilungsfunktionen können sofort nach dem Start von **R** mit den folgenden Befehlen ausgewertet werden:

| Verteilung von $X$ | Parameter | $F_X$ an Stelle `x` mit **R** |
|---|---|---|
| $B(n,p)$ | `size=`$n$, `prob=`$p$ | `pbinom(x,size,prob)` |
| $\mathrm{Geom}(p)$ | `prob=`$p$ | `pgeom(x,prob)` |
| $\mathrm{Pois}(\lambda)$ | `lambda=`$\lambda$ | `ppois(x,lambda)` |
| $\mathrm{Unif}(a,b)$ | `min=`$a$, `max=`$b$ | `punif(x,min,max)` |
| $N(\mu,\sigma^2)$ | `mean=`$\mu$, `sd=`$\sqrt{\sigma^2}$ | `pnorm(x,mean,sd)` |
| $\mathrm{Exp}(\lambda)$ | `rate=`$\lambda$ | `pexp(x,rate)` |

- Ersetzt man in den Befehlen den ersten Buchstaben `p` durch `d` (z.B. `dnorm`), so erhält man den Wert der Dichtefunktion bzw. Wahrscheinlichkeitsfunktion an der Stelle `x`.
- Ersetzt man in den Befehlen den ersten Buchstaben `p` durch `q` (z.B. `qnorm`) und `x` durch `p`, so erhält man das (bzw. ein) `p`-Quantil der zugehörigen Verteilung.
- Ersetzt man schließlich in den Befehlen den ersten Buchstaben `p` durch `r` (z.B. `rnorm`) und `x` durch `n` $\in \mathbb{N}$, so erhält man `n` (Pseudo-)Zufallszahlen zur zugehörigen Verteilung.

# Hinweise zur Tabellennutzung

- Bezeichnet $F_{B(n,p)}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $p \in (0,1)$ die Verteilungsfunktion der $B(n,p)$-Verteilung, so gilt (!)

$$F_{B(n,1-p)}(x) = 1 - F_{B(n,p)}(n-x-1)$$

  für alle $n \in \mathbb{N}$, $p \in (0,1)$, $x \in \{0,\ldots,n-1\}$. Daher werden Tabellen zur Binomialverteilung nur für $p \in (0,0.5]$ erstellt, und die benötigten Werte für $p \in [0.5,1)$ mit obiger Formel aus den Werten für $p \in (0,0.5]$ gewonnen.
- Wegen der Symmetrie der Standardnormalverteilung um 0 gilt nicht nur $\varphi(x) = \varphi(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, sondern auch (vgl. Folie 216)

$$\Phi(x) = 1 - \Phi(-x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}\ .$$

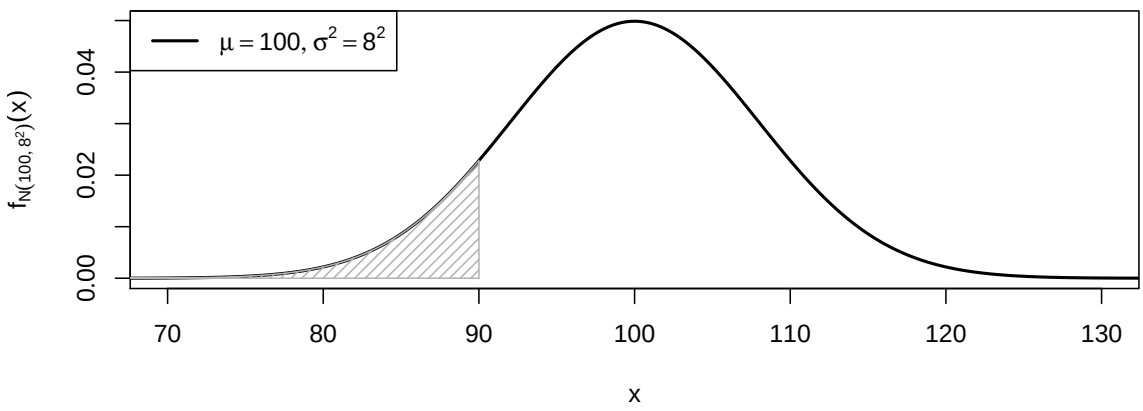
  Daher werden Tabellen für $\Phi(x)$ in der Regel nur für $x \in \mathbb{R}_+$ erstellt.
- Zur Bestimmung von Quantilen darf in der Klausur ein beliebiger Wert des Intervalls, in dem das Quantil laut Tabelle liegen muss, eingesetzt werden; eine lineare Interpolation ist zwar sinnvoll, aber nicht nötig!
- Generell gilt: Ist ein Wert nicht tabelliert, wird stattdessen ein „naheliegender“ Wert aus der Tabelle eingesetzt.
  Beispiel: Für fehlenden Wert $F_{B(4,0.28)}(2)$ wird $F_{B(4,0.3)}(2)$ eingesetzt.





# Beispiel: Arbeiten mit Normalverteilungstabelle

- **Frage:** Mit welcher Wahrscheinlichkeit nimmt eine $N(100, 8^2)$-verteilte Zufallsvariable Werte kleiner als 90 an? (Wie groß ist die schraffierte Fläche?)

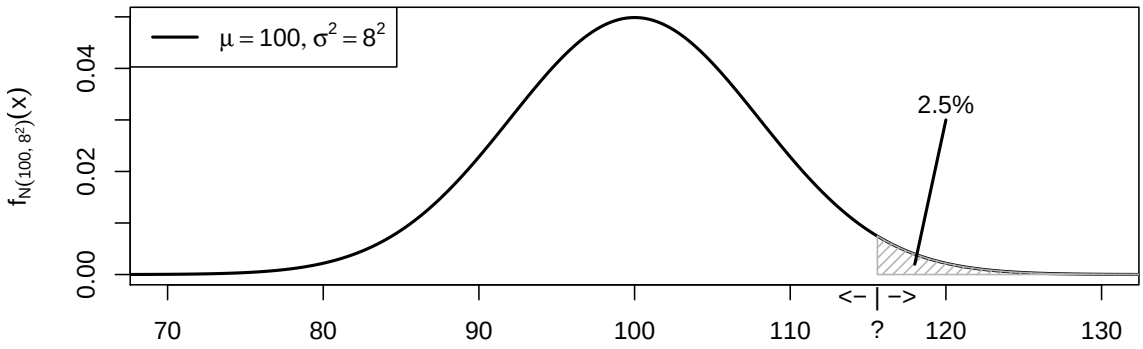



- **Antwort:** Ist $X \sim N(100, 8^2)$, so gilt:

$$\begin{aligned} P\{X < 90\} &= F_{N(100,8^2)}(90) = \Phi\left(\frac{90-100}{8}\right) \\ &= \Phi(-1.25) = 1 - \Phi(1.25) = 1 - 0.8944 = 0.1056 \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist $0.1056 = 10.56\%$.

- **Frage:** Welchen Wert $x$ überschreitet eine $N(100, 8^2)$-verteilte Zufallsvariable nur mit 2.5% Wahrscheinlichkeit? (Welche linke Grenze $x$ führt bei der schraffierten Fläche zu einem Flächeninhalt von 0.025?)




- **Antwort:** Ist $X \sim N(100, 8^2)$, so ist das 97.5%- bzw. 0.975-Quantil von $X$ gesucht. Mit

$$F_X(x) = F_{N(100,8^2)}(x) = \Phi\left(\frac{x-100}{8}\right)$$

erhält man

$$\Phi\left(\frac{x-100}{8}\right) \stackrel{!}{=} 0.975 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x-100}{8} = \Phi^{-1}(0.975) = 1.96$$
$$\Rightarrow \quad x = 8 \cdot 1.96 + 100 = 115.68$$





# Beispiel: Arbeiten mit Statistik-Software **R**

- Beantwortung der Fragen (noch) einfacher mit Statistik-Software **R**:
- **Frage:** Mit welcher Wahrscheinlichkeit nimmt eine $N(100, 8^2)$-verteilte Zufallsvariable Werte kleiner als 90 an?
- **Antwort:**

```
> pnorm(90,mean=100,sd=8)
[1] 0.1056498
```

- **Frage:** Welchen Wert $x$ überschreitet eine $N(100, 8^2)$-verteilte Zufallsvariable nur mit 2.5% Wahrscheinlichkeit?
- **Antwort:**

```
> qnorm(0.975,mean=100,sd=8)
[1] 115.6797
```

oder alternativ

```
> qnorm(0.025,mean=100,sd=8,lower.tail=FALSE)
[1] 115.6797
```