

Inhaltsverzeichnis

(Ausschnitt)

10 Mehrdimensionale Zufallsvariablen

- Borelsche sigma-Algebra
- Diskrete Zufallsvektoren
- Stetige Zufallsvektoren
- Randverteilungen
- (Stochastische) Unabhängigkeit
- Bedingte Verteilungen
- Momente zweidimensionaler Zufallsvektoren
- Momente höherdimensionaler Zufallsvektoren

Mehrdimensionale Zufallsvariablen/Zufallsvektoren II

Definition 10.1 (Zufallsvektor, Mehrdimensionale Zufallsvariable)

Seien (Ω, \mathcal{F}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum, $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbf{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n : \mathbf{X}(\omega) = (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))'$$

eine $\mathcal{F} - \mathcal{B}^n$ -messbare Abbildung. Dann heißen \mathbf{X} **n -dimensionale Zufallsvariable** bzw. **n -dimensionaler Zufallsvektor** über (Ω, \mathcal{F}, P) und die gemäß Definition 8.3 gebildete Bildwahrscheinlichkeit

$$P_{\mathbf{X}} : \mathcal{B}^n \rightarrow \mathbb{R}; \mathbf{B} \mapsto P(\mathbf{X}^{-1}(\mathbf{B}))$$

(gemeinsame) Wahrscheinlichkeitsverteilung oder kürzer **(gemeinsame) Verteilung** von \mathbf{X} . $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n, P_{\mathbf{X}})$ ist damit ebenfalls ein Wahrscheinlichkeitsraum. Liegt nach Durchführung des Zufallsexperiments (Ω, \mathcal{F}, P) das Ergebnis $\omega \in \Omega$ vor, so heißt der zugehörige Wert $\mathbf{x} = \mathbf{X}(\omega)$ die **Realisierung** oder **Realisation** von \mathbf{X} .

Mehrdimensionale Zufallsvariablen/Zufallsvektoren I

- Im Folgenden: *Simultane* Betrachtung *mehrerer* (endlich vieler) Zufallsvariablen über *demselben* Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) .
- Ist $n \in \mathbb{N}$ die Anzahl der betrachteten Zufallsvariablen, so fasst man die n Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n in einem n -dimensionalen Vektor $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)'$ zusammen.
- Damit ist \mathbb{R}^n der Wertebereich der Abbildung $\mathbf{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, als σ -Algebra über \mathbb{R}^n wählt man die n -dimensionale Borelsche σ -Algebra \mathcal{B}^n , in der alle karthesischen Produkte von n Elementen aus \mathcal{B} enthalten sind.
- Insbesondere enthält \mathcal{B}^n alle endlichen und abzählbar unendlichen Teilmengen von \mathbb{R}^n sowie alle karthesischen Produkte von n Intervallen aus \mathbb{R} .
- Damit lassen sich die meisten bekannten Konzepte eindimensionaler Zufallsvariablen leicht übertragen.
- Ähnlich zur Situation bei mehrdimensionalen Merkmalen in der deskriptiven Statistik werden viele Darstellungen im Fall $n > 2$ allerdings schwierig.

Mehrdimensionale Zufallsvariablen/Zufallsvektoren III

- Wie im eindimensionalen Fall sind Kurzschreibweisen (zum Beispiel) der Form

$$P\{X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n\} := P_{\mathbf{X}}((-\infty, x_1] \times \dots \times (-\infty, x_n])$$

für $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ geläufig.

- Auch hier legen die Wahrscheinlichkeiten solcher Ereignisse die Verteilung des n -dimensionalen Zufallsvektors bereits eindeutig fest, und man definiert analog zum eindimensionalen Fall die gemeinsame Verteilungsfunktion

$$F_{\mathbf{X}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}; F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) := P_{\mathbf{X}}((-\infty, x_1] \times \dots \times (-\infty, x_n]) .$$

- Gemeinsame Verteilungsfunktionen mehrdimensionaler Zufallsvariablen sind allerdings für den praktischen Einsatz im Vergleich zur eindimensionalen Variante relativ unbedeutend und werden daher hier nicht weiter besprochen.

Diskrete Zufallsvektoren I

- Ist analog zum eindimensionalen Fall

$$\mathbf{X}(\Omega) := \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} = \mathbf{X}(\omega) \text{ für (mindestens) ein } \omega \in \Omega\}$$

endlich oder abzählbar unendlich bzw. existiert (wiederum etwas allgemeiner) eine endliche oder abzählbar unendliche Menge $\mathbf{B} \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $P(\{\mathbf{X} \in \mathbf{B}\}) = 1$, so nennt man auch solche Zufallsvektoren „diskret“.

- Mit Hilfe einer (mehrdimensionalen) Wahrscheinlichkeitsfunktion $p_{\mathbf{X}}$ mit $p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) := P_{\mathbf{X}}(\{\mathbf{x}\})$ für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ können Wahrscheinlichkeiten $P\{\mathbf{X} \in \mathbf{A}\}$ für Ereignisse $\mathbf{A} \in \mathcal{B}^n$ wiederum durch Aufsummieren der Punktwahrscheinlichkeiten aller Trägerpunkte \mathbf{x}_i mit $\mathbf{x}_i \in \mathbf{A}$ berechnet werden, also durch:

$$P\{\mathbf{X} \in \mathbf{A}\} = \sum_{\mathbf{x}_i \in \mathbf{A} \cap T(\mathbf{X})} p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_i) \quad \text{für alle } \mathbf{A} \in \mathcal{B}^n$$

Stetige Zufallsvektoren I

- Zweiter wichtiger Spezialfall (wie im eindimensionalen Fall): **stetige** n -dimensionale Zufallsvektoren \mathbf{X}
- Wiederum gilt $P_{\mathbf{X}}(\mathbf{B}) = 0$ *insbesondere* für alle endlichen oder abzählbar unendlichen Teilmengen $\mathbf{B} \subseteq \mathbb{R}^n$.
- Auch hier ist die definierende Eigenschaft die Möglichkeit zur Berechnung spezieller Wahrscheinlichkeiten als Integral über eine (nun mehrdimensionale) Dichtefunktion.
- In Verallgemeinerung der Berechnung von *Intervallwahrscheinlichkeiten* im eindimensionalen Fall müssen nun *Wahrscheinlichkeiten von Quadern* als (Mehrfach-)Integral über eine Dichtefunktion berechnet werden können.

Diskrete Zufallsvektoren II

Definition 10.2 (Diskreter Zufallsvektor)

Seien (Ω, \mathcal{F}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum, $n \in \mathbb{N}$, \mathbf{X} ein n -dimensionaler Zufallsvektor über (Ω, \mathcal{F}, P) und $\mathbf{B} \subseteq \mathbb{R}^n$ endlich oder abzählbar unendlich mit $P(\{\mathbf{X} \in \mathbf{B}\}) = 1$. Dann nennt man

- \mathbf{X} einen **diskreten** Zufallsvektor,
- $p_{\mathbf{X}} : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$; $p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) := P_{\mathbf{X}}(\{\mathbf{x}\})$ die **(gemeinsame) Wahrscheinlichkeitsfunktion** von \mathbf{X} ,
- $T(\mathbf{X}) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) > 0\}$ den **Träger** von \mathbf{X} sowie alle Elemente $\mathbf{x} \in T(\mathbf{X})$ **Trägerpunkte** von \mathbf{X} und deren zugehörige Wahrscheinlichkeitsfunktionswerte $p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ **Punktwahrscheinlichkeiten**.

Stetige Zufallsvektoren II

Definition 10.3 (Stetiger Zufallsvektor, (gemeinsame) Dichtefunktion)

Seien (Ω, \mathcal{F}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum, $n \in \mathbb{N}$ und \mathbf{X} ein n -dimensionaler Zufallsvektor über (Ω, \mathcal{F}, P) . Gibt es eine nichtnegative Abbildung $f_{\mathbf{X}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$P_{\mathbf{X}}(\mathbf{A}) = \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} f_{\mathbf{X}}(t_1, \dots, t_n) dt_n \cdots dt_1 \quad (5)$$

für alle Quader $\mathbf{A} = (a_1, b_1] \times \cdots \times (a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ mit $a_1 \leq b_1, \dots, a_n \leq b_n$, so heißt der Zufallsvektor \mathbf{X} **stetig**. Jede nichtnegative Abbildung $f_{\mathbf{X}}$ mit der Eigenschaft (5) heißt **(gemeinsame) Dichtefunktion** von \mathbf{X} .