Inhaltsverzeichnis

(Ausschnitt)

Mehrdimensionale Zufallsvariablen/Zufallsvektoren I

- Im Folgenden: *Simultane* Betrachtung *mehrerer* (endlich vieler) Zufallsvariablen über *demselben* Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.
- Ist $n \in \mathbb{N}$ die Anzahl der betrachteten Zufallsvariablen, so fasst man die n Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ in einem n-dimensionalen Vektor $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$ zusammen.
- Damit ist $\mathbb{R}^n$ der Wertebereich der Abbildung $\mathbf{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n$, als σ-Algebra über $\mathbb{R}^n$ wählt man die n-dimensionale Borelsche σ-Algebra $\mathcal{B}^n$, in der alle karthesischen Produkte von n Elementen aus $\mathcal{B}$ enthalten sind.
- Insbesondere enthält $\mathcal{B}^n$ alle endlichen und abzählbar unendlichen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ sowie alle karthesischen Produkte von n Intervallen aus $\mathbb{R}$.
- Damit lassen sich die meisten bekannten Konzepte eindimensionaler Zufallsvariablen leicht übertragen.
- Ähnlich zur Situation bei mehrdimensionalen Merkmalen in der deskriptiven Statistik werden viele Darstellungen im Fall $n > 2$ allerdings schwierig.

Mehrdimensionale Zufallsvariablen/Zufallsvektoren II

Definition 10.1 (Zufallsvektor, Mehrdimensionale Zufallsvariable)

Seien $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbf{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n : \mathbf{X}(\omega) = (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))'$$

eine $\mathcal{F} - \mathcal{B}^n-$messbare Abbildung. Dann heißen $\mathbf{X}$ ***n*-dimensionale Zufallsvariable** bzw. ***n*-dimensionaler Zufallsvektor** über $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und die gemäß Definition 8.3 gebildete Bildwahrscheinlichkeit

$$P_{\mathbf{X}} : \mathcal{B}^n \to \mathbb{R}; \mathbf{B} \mapsto P(\mathbf{X}^{-1}(\mathbf{B}))$$

(gemeinsame) Wahrscheinlichkeitsverteilung oder kürzer **(gemeinsame) Verteilung** von $\mathbf{X}$. $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n, P_{\mathbf{X}})$ ist damit ebenfalls ein Wahrscheinlichkeitsraum. Liegt nach Durchführung des Zufallsexperiments $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ das Ergebnis $\omega \in \Omega$ vor, so heißt der zugehörige Wert $\mathbf{x} = \mathbf{X}(\omega)$ die **Realisierung** oder **Realisation** von $\mathbf{X}$.

Mehrdimensionale Zufallsvariablen/Zufallsvektoren III

- Wie im eindimensionalen Fall sind Kurzschreibweisen (zum Beispiel) der Form

$$P\{X_1 \le x_1, \dots, X_n \le x_n\} := P_{\mathbf{X}}((-\infty, x_1] \times \cdots \times (-\infty, x_n])$$

  für $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ geläufig.
- Auch hier legen die Wahrscheinlichkeiten solcher Ereignisse die Verteilung des n-dimensionalen Zufallsvektors bereits eindeutig fest, und man definiert analog zum eindimensionalen Fall die gemeinsame Verteilungsfunktion

$$F_{\mathbf{X}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}; F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) := P_{\mathbf{X}}((-\infty, x_1] \times \ldots \times (-\infty, x_n]) \; .$$

- Gemeinsame Verteilungsfunktionen mehrdimensionaler Zufallsvariablen sind allerdings für den praktischen Einsatz im Vergleich zur eindimensionalen Variante relativ unbedeutend und werden daher hier nicht weiter besprochen.

Diskrete Zufallsvektoren I

- Ist analog zum eindimensionalen Fall

$$\mathbf{X}(\Omega) := \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} = \mathbf{X}(\omega) \text{ für (mindestens) ein } \omega \in \Omega\}$$

  endlich oder abzählbar unendlich bzw. existiert (wiederum etwas allgemeiner) eine endliche oder abzählbar unendliche Menge $\mathbf{B} \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $P(\{\mathbf{X} \in \mathbf{B}\}) = 1$, so nennt man auch solche Zufallsvektoren „diskret“.
- Mit Hilfe einer (mehrdimensionalen) Wahrscheinlichkeitsfunktion $p_{\mathbf{X}}$ mit $p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) := P_{\mathbf{X}}(\{\mathbf{x}\})$ für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ können Wahrscheinlichkeiten $P\{\mathbf{X} \in \mathbf{A}\}$ für Ereignisse $\mathbf{A} \in \mathcal{B}^n$ wiederum durch Aufsummieren der Punktwahrscheinlichkeiten aller Trägerpunkte $\mathbf{x}_i$ mit $\mathbf{x}_i \in \mathbf{A}$ berechnet werden, also durch:

$$P\{\mathbf{X} \in \mathbf{A}\} = \sum_{\mathbf{x}_i \in \mathbf{A} \cap T(\mathbf{X})} p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_i) \qquad \text{für alle } \mathbf{A} \in \mathcal{B}^n$$

Diskrete Zufallsvektoren II

Definition 10.2 (Diskreter Zufallsvektor)

Seien $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{X}$ ein n-dimensionaler Zufallsvektor über $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und $\mathbf{B} \subseteq \mathbb{R}^n$ endlich oder abzählbar unendlich mit $P(\{\mathbf{X} \in \mathbf{B}\}) = 1$. Dann nennt man

- $\mathbf{X}$ einen **diskreten** Zufallsvektor,
- $p_{\mathbf{X}} : \mathbb{R}^n \to [0, 1]; p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) := P_{\mathbf{X}}(\{\mathbf{x}\})$ die **(gemeinsame) Wahrscheinlichkeitsfunktion** von $\mathbf{X}$,
- $T(\mathbf{X}) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) > 0\}$ den **Träger** von $\mathbf{X}$ sowie alle Elemente $\mathbf{x} \in T(\mathbf{X})$ **Trägerpunkte** von $\mathbf{X}$ und deren zugehörige Wahrscheinlichkeitsfunktionswerte $p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ **Punktwahrscheinlichkeiten**.

Stetige Zufallsvektoren I

- Zweiter wichtiger Spezialfall (wie im eindimensionalen Fall): **stetige** n-dimensionale Zufallsvektoren $\mathbf{X}$
- Wiederum gilt $P_{\mathbf{X}}(\mathbf{B}) = 0$ *insbesondere* für alle endlichen oder abzählbar unendlichen Teilmengen $\mathbf{B} \subseteq \mathbb{R}^n$.
- Auch hier ist die definierende Eigenschaft die Möglichkeit zur Berechnung spezieller Wahrscheinlichkeiten als Integral über eine (nun mehrdimensionale) Dichtefunktion.
- In Verallgemeinerung der Berechnung von *Intervallwahrscheinlichkeiten* im eindimensionalen Fall müssen nun *Wahrscheinlichkeiten von Quadern* als (Mehrfach-)Integral über eine Dichtefunktion berechnet werden können.

Stetige Zufallsvektoren II

Definition 10.3 (Stetiger Zufallsvektor, (gemeinsame) Dichtefunktion)

Seien $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $n \in \mathbb{N}$ und $\mathbf{X}$ ein n-dimensionaler Zufallsvektor über $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Gibt es eine nichtnegative Abbildung $f_{\mathbf{X}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit

$$P_{\mathbf{X}}(\mathbf{A}) = \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} f_{\mathbf{X}}(t_1, \ldots, t_n) dt_n \cdots dt_1 \tag{5}$$

für alle Quader $\mathbf{A} = (a_1, b_1] \times \cdots \times (a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ mit $a_1 \le b_1, \ldots, a_n \le b_n$, so heißt der Zufallsvektor $\mathbf{X}$ **stetig**. Jede nichtnegative Abbildung $f_{\mathbf{X}}$ mit der Eigenschaft (5) heißt **(gemeinsame) Dichtefunktion** von $\mathbf{X}$.