Inhaltsverzeichnis

(Ausschnitt)

Laplacesche Wahrscheinlichkeitsräume I

- Einfachster Fall für $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ (wie in Würfel-Beispiel):
  - Ω endlich,
  - Eintritt aller Ergebnisse $\omega \in \Omega$ gleichwahrscheinlich.
- Wahrscheinlichkeitsräume mit dieser Eigenschaft heißen **Laplacesche Wahrscheinlichkeitsräume**.
- Als σ-Algebra $\mathcal{F}$ kann stets $\mathcal{P}(\Omega)$ angenommen werden.
  Insbesondere ist also jede beliebige Teilmenge von Ω ein Ereignis, dessen Eintrittswahrscheinlichkeit berechnet werden kann.

Laplacesche Wahrscheinlichkeitsräume II

- Das **Laplacesche Wahrscheinlichkeitsmaß** P ergibt sich dann als:
$$P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}; P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$
- Wahrscheinlichkeit $P(A)$ eines Ereignisses A ist also der Quotient
$$\frac{\text{Anzahl der im Ereignis } A \text{ enthaltenen Ergebnisse}}{\text{Anzahl aller möglichen Ergebnisse}}$$
  bzw.
$$\frac{\text{Anzahl der (für Ereignis } A\text{) günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der (insgesamt) möglichen Fälle}} .$$
- Einzige Schwierigkeit: **Zählen!**

Kombinatorik

- Disziplin, die sich mit „Zählen" beschäftigt: **Kombinatorik**
- Verwendung allgemeiner Prinzipien und Modelle als Hilfestellung zum Zählen in konkreten Anwendungen.

Satz 6.1 (Additionsprinzip, Multiplikationsprinzip)

Sei $r \in \mathbb{N}$, seien $M_1, M_2, \ldots, M_r$ (jeweils) endliche Mengen.

- *Ist $M_i \cap M_j = \emptyset$ für alle $i \neq j$, dann gilt das* **Additionsprinzip**
$$|M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_r| = |M_1| + |M_2| + \cdots + |M_r| .$$
- *Mit $M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_r := \{(m_1, \ldots, m_r) \,|\, m_1 \in M_1, \ldots, m_r \in M_r\}$ gilt das* **Multiplikationsprinzip**
$$|M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_r| = |M_1| \cdot |M_2| \cdot \ldots \cdot |M_r|$$
  und im Fall $M = M_1 = M_2 = \cdots = M_r$ mit $M^r := \underbrace{M \times M \times \cdots \times M}_{r-\text{mal}}$ spezieller
  $|M^r| = |M|^r$.

Definition 6.2 (Fakultät, Binomialkoeffizient)

1. Mit $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ sei die Menge der natürlichen Zahlen einschließlich Null bezeichnet.
2. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ definiert man die Zahl $n! \in \mathbb{N}$ (gelesen „n-**Fakultät**") rekursiv durch
   - $0! := 1$ und
   - $(n+1)! := (n+1) \cdot n!$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
3. Für $n, r \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \le r \le n$ definiert man die Zahl $(n)_r$ (gelesen „n tief r") durch
$$(n)_r := \frac{n!}{(n-r)!} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-r+1) \ .$$
4. Für $n, r \in \mathbb{N}_0$ und $0 \le r \le n$ definiert man den **Binomialkoeffizienten** $\binom{n}{r}$ (gelesen „n über r") durch
$$\binom{n}{r} := \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!} \ .$$

Modelle zum Zählen I

- Gebräuchliches (Hilfs-)Modell zum Zählen: **Urnenmodell**:

  Wie viele Möglichkeiten gibt es, r mal aus einer Urne mit n unterscheidbaren (z.B. von 1 bis n nummerierten) Kugeln zu ziehen?
- Varianten:
  - Ist die Reihenfolge der Ziehungen relevant?
  - Wird die Kugel nach jeder Ziehung wieder in die Urne zurückgelegt?

Modelle zum Zählen II

- *Alternatives Modell:*

  Wie viele Möglichkeiten gibt es, r Murmeln in n unterscheidbare (z. B. von 1 bis n nummerierte) Schubladen zu verteilen.

  Achtung: Auch als weiteres Urnenmodell (Verteilen von r Kugeln auf n Urnen) geläufig!
- Varianten:
  - Sind (auch) die Murmeln unterscheidbar?
  - Dürfen mehrere Murmeln pro Schublade (Mehrfachbelegungen) vorhanden sein?
- Beide Modelle entsprechen sich (einschließlich ihrer Varianten)!
- Im Folgenden (zur Vereinfachung der Darstellung):
  Identifizieren von endlichen Mengen der Mächtigkeit n mit der Menge $\mathbb{N}_n := \{1, 2, \ldots, n\}$ der ersten n natürlichen Zahlen.

Variante I

„geordnete Probe (Variation) mit Wiederholung"

- Ziehen **mit Zurücklegen** und **mit** Berücksichtigung der **Reihenfolge**.

  Für jede der r Ziehungen n Möglichkeiten, Multiplikationsprinzip anwenden.
- Anzahl der Möglichkeiten:
$${}^{w}_{n}V_{r} := \underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{r \text{ Faktoren}} = n^r$$
- Formale Darstellung aller Möglichkeiten:
$$\{(m_1, \ldots, m_r) \mid m_1, \ldots, m_r \in \mathbb{N}_n\} = \mathbb{N}_n^r$$
- gleichbedeutend: Verteilen von **unterscheidbaren** Murmeln **mit** Zulassung von **Mehrfachbelegungen**

Variante II

„geordnete Probe (Variation) ohne Wiederholung“

- Ziehen **ohne Zurücklegen** und **mit** Berücksichtigung der **Reihenfolge**.

  Für erste Ziehung n Möglichkeiten, für zweite $n-1$, ..., für r-te Ziehung $n-r+1$ Möglichkeiten, Multiplikationsprinzip anwenden.
- Anzahl der Möglichkeiten:

$$_nV_r := n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!} = (n)_r$$

- Formale Darstellung aller Möglichkeiten:

$$\{(m_1, \ldots, m_r) \in \mathbb{N}_n^r \mid m_i \neq m_j \text{ für } i \neq j, 1 \leq i, j \leq r\}$$

- gleichbedeutend: Verteilen von **unterscheidbaren** Murmeln **ohne** Zulassung von **Mehrfachbelegungen**
- **Spezialfall:** $n = r$
  - $\rightsquigarrow$ $n!$ verschiedene Möglichkeiten
  - entspricht (Anzahl der) möglichen Anordnungen (**Permutationen**) von n unterscheidbaren Kugeln bzw. n unterscheidbaren Murmeln

Variante III

„ungeordnete Probe (Kombination) ohne Wiederholung“

- Ziehen **ohne Zurücklegen** und **ohne** Berücksichtigung der **Reihenfolge**.

  Wie in Variante 2: Für erste Ziehung n Möglichkeiten, für zweite $n-1$, ..., für r-te Ziehung $n-r+1$ Möglichkeiten, Multiplikationsprinzip anwenden; **aber:** *je $r!$ Möglichkeiten unterscheiden sich nur durch die (nicht zu berücksichtigende!) Reihenfolge.*
- Anzahl der Möglichkeiten:

$$_nC_r := \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-r+1)}{r \cdot (r-1) \cdot \ldots \cdot 1} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r}$$

- Formale Darstellung aller Möglichkeiten:

$$\{(m_1, \ldots, m_r) \in \mathbb{N}_n^r \mid m_1 < m_2 < \cdots < m_r\}$$

- gleichbedeutend: Verteilen von **nicht unterscheidbaren** Murmeln **ohne** Zulassung von **Mehrfachbelegungen**
- Häufig Anwendung bei *gleichzeitigem* Ziehen von r aus n Objekten bzw. simultane Auswahl von r aus n Plätzen; Anzahl der Möglichkeiten entspricht Anzahl r-elementiger Teilmengen aus n-elementiger Menge.

Variante IV

„ungeordnete Probe (Kombination) mit Wiederholung“

- Ziehen **mit Zurücklegen** und **ohne** Berücksichtigung der **Reihenfolge**.

  Verständnis schwieriger!
  Vorstellung: Erstelle „Strichliste“ mit r Strichen, verteilt auf n Felder (eines für jede Kugel) $\rightsquigarrow$ r Striche zwischen $n-1$ „Feldbegrenzungen“. Anzahl Möglichkeiten entspricht Anzahl der Möglichkeiten, die r Striche in der „Reihung“ der $n-1+r$ Striche&Feldbegrenzungen zu positionieren.
- Anzahl der Möglichkeiten:

$$^w_nC_r := \binom{n+r-1}{r} = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!} = \frac{(n+r-1) \cdot (n+r-2) \cdot \ldots \cdot n}{r \cdot (r-1) \cdot \ldots \cdot 1}$$

- Formale Darstellung aller Möglichkeiten:

$$\{(m_1, \ldots, m_r) \in \mathbb{N}_n^r \mid m_1 \leq m_2 \leq \cdots \leq m_r\}$$

- gleichbedeutend: Verteilen von **nicht unterscheidbaren** Murmeln **mit** Zulassung von **Mehrfachbelegungen**
- **Achtung:** Üblicherweise **nicht** geeignet als Ω in Laplaceschen Wahrscheinlichkeitsräumen, da die verschiedenen Möglichkeiten bei üblichen Ziehungsvorgängen nicht alle gleichwahrscheinlich sind!

Übersicht der Varianten I–IV

vgl. Ulrich Krengel, Einführung in die W.-Theorie und Statistik, 7. Aufl., Vieweg, Wiesbaden, 2003

r unterscheidbare Kugeln aus Urne mit n (unterscheidbaren) Kugeln	**mit** Zurücklegen	**ohne** Zurücklegen	
mit Berücksichtigung der Reihenfolge	Variante I $^w_nV_r = n^r$	Variante II $_nV_r = (n)_r$	**unterscheidbare** Murmeln
ohne Berücksichtigung der Reihenfolge	Variante IV $^w_nC_r = \binom{n+r-1}{r}$	Variante III $_nC_r = \binom{n}{r}$	**nicht unterscheidbare** Murmeln
	mit Mehrfachbesetzung	**ohne** Mehrfachbesetzung	r Murmeln in n unterscheidbare Schubladen

Bemerkungen

- Wird ohne Zurücklegen gezogen, muss natürlich $r \leq n$ gefordert werden!
  (Es können insgesamt nicht mehr Kugeln entnommen werden, als zu Beginn in der Urne enthalten waren.)
- Werden **alle** Kugeln ohne Zurücklegen unter Berücksichtigung der Reihenfolge entnommen, wird häufig folgende Verallgemeinerung betrachtet:
  - Nicht alle n Kugeln sind unterscheidbar (durchnummeriert).
  - Es gibt $m < n$ (unterscheidbare) Gruppen von Kugeln, die jeweils $n_1, n_2, \ldots, n_m$ **nicht** unterscheidbare Kugeln umfassen (mit $n = \sum_{i=1}^{m} n_i$).
  - Da es jeweils $n_1!, n_2!, \ldots, n_m!$ nicht unterscheidbare Anordnungen der Kugeln innerhalb der Gruppen gibt, reduziert sich die Anzahl der insgesamt vorhandenen Möglichkeiten von ${}_nP := {}_nV_n = n!$ auf

$$ {}_nP_{n_1,n_2,\ldots,n_m} := \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_m!} \,. $$

  - Typische Anwendung: Buchstabenanordnungen bei „Scrabble“
  - Nenner von ${}_nP_{n_1,n_2,\ldots,n_m}$ liefert Anzahl der Möglichkeiten für jeweils nicht unterscheidbare Anordnungen.

- Anwendung der Kombinatorik in Laplaceschen Wahrscheinlichkeitsräumen:
  - Auswahl eines geeigneten Ergebnisraums Ω mit **gleichwahrscheinlichen** Ausgängen des Zufallsexperiments.
  - Bestimmen von $|\Omega|$ mit kombinatorischen Hilfsmitteln.
  - Bestimmen von $|A|$ für interessierende Ereignisse $A \subseteq \Omega$ mit kombinatorischen Hilfsmitteln.
- Häufig gibt es nicht **die** richtige Lösung, sondern mehrere, da oft mehrere Modelle (mehr oder weniger) geeignet sind.
- Wird aber beispielsweise Ω unter Berücksichtigung der Ziehungsreihenfolge konstruiert, obwohl die Reihenfolge für das interessierende Ereignis A unwichtig ist, müssen unterschiedliche mögliche Anordnungen bei der Konstruktion von A ebenfalls berücksichtigt werden!
- Trotz vorhandener (und nützlicher) Modelle:

  Richtiges Zählen hat häufig „Knobelcharacter“, stures Einsetzen in Formeln selten ausreichend, Mitdenken erforderlich!

Beispiele

- **Lottospiel „6 aus 49“** (ohne Berücksichtigung einer Zusatzzahl)
  - Interessierendes Ereignis A: (Genau) 3 „Richtige“
  - $|\Omega| = \binom{49}{6} = 13983816$, $|A| = \binom{6}{3} \cdot \binom{43}{3} = 246820$

  $\Rightarrow$ $P(A) = \dfrac{\binom{6}{3} \cdot \binom{43}{3}}{\binom{49}{6}} = 0.01765 = 1.765\%$
- Anzahl der Möglichkeiten bei **zweimaligem Würfelwurf**
  - wenn die Reihenfolge irrelevant (z.B. bei gleichzeitigem Werfen) ist:
    $|\Omega| = \binom{6+2-1}{2} = 21$
    Vorsicht: nicht alle Ergebnisse gleichwahrscheinlich!
  - wenn die Reihenfolge relevant ist:
    $|\Omega| = 6^2 = 36$
- **Geburtstage**
  Zusammensetzung der Geburtstage (ohne Jahreszahl; Vernachlässigung von Schaltjahren) bei r Personen (mit Reihenfolgeberücksichtigung)
  - Interessierendes Ereignis A_r: alle r Personen haben verschiedene Geburtstage
  - $|\Omega_r| = 365^r$, $|A_r| = (365)_r$ für $r \leq 365$, $|A_r| = 0$ sonst.

  $\Rightarrow$ $P(A_r) = \frac{(365)_r}{365^r}$ für $r \leq 365$, $P(A_r) = 0$ sonst.