Weitere Lagemaße: Quantile/Perzentile I

- Für jeden Median x_{med} gilt: Mindestens 50% der Merkmalswerte sind kleiner gleich x_{med} und ebenso mindestens 50% größer gleich x_{med}.
- Verallgemeinerung dieser Eigenschaft auf beliebige Anteile geläufig, also auf Werte, zu denen mindestens ein Anteil p kleiner gleich und ein Anteil $1-p$ größer gleich ist, sog. p-**Quantilen** (auch p-**Perzentile**) x_p.
- Mediane sind dann gleichbedeutend mit 50%-Quantilen bzw. 0.5-Quantilen, es gilt also insbesondere bei eindeutigen Medianen

$$x_{\text{med}} = x_{0.5} \ .$$

Weitere Lagemaße: Quantile/Perzentile II

Definition 3.5 (Quantile/Perzentile, Quartile)

Sei X ein (mindestens) ordinalskaliertes Merkmal auf der Menge der vorstellbaren Merkmalsausprägungen M mit den Merkmalswerten $x_1, \ldots, x_n$.
Für $0 < p < 1$ heißt jeder Wert $x_p \in M$ mit der Eigenschaft

$$\frac{\#\{i \in \{1,\ldots,n\} \mid x_i \leq x_p\}}{n} \geq p \quad \text{und} \quad \frac{\#\{i \in \{1,\ldots,n\} \mid x_i \geq x_p\}}{n} \geq 1-p$$

p-**Quantil** (auch p-**Perzentil**) von X. Man bezeichnet spezieller das 0.25-Quantil $x_{0.25}$ als **unteres Quartil** sowie das 0.75-Quantil $x_{0.75}$ als **oberes Quartil**.

Weitere Lagemaße: Quantile/Perzentile III

- p-Quantile kann man auch mit der emp. Verteilungsfunktion F bestimmen:
- Mit der Abkürzung

$$F(x-0) := \lim_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} F(x-h), \qquad x \in \mathbb{R},$$

für linksseitige Grenzwerte empirischer Verteilungsfunktionen F ist x_p ist genau dann ein p-Quantil, wenn gilt:

$$F(x_p - 0) \leq p \leq F(x_p)$$

- Spezieller ist x_p genau dann ein p-Quantil, wenn
  - bei Vorliegen der exakten Häufigkeitsverteilung r und Verteilungsfunktion F

$$F(x_p) - r(x_p) \leq p \leq F(x_p) \ ,$$

  - bei Verwendung der approximativen Verteilungsfunktion F bei klassierten Daten (wegen der Stetigkeit der Approximation!)

$$F(x_p) = p$$

gilt.

Weitere Lagemaße: Quantile/Perzentile IV

- Genauso wie der Median muss ein p-Quantil nicht eindeutig bestimmt sein.
- Bei stetigen Merkmalen kann Eindeutigkeit *zum Beispiel* durch die gängige Festlegung

$$x_p = \begin{cases} x_{(\lfloor n \cdot p \rfloor + 1)} & \text{für} \quad n \cdot p \notin \mathbb{N} \\ \frac{1}{2} \cdot \left(x_{(n \cdot p)} + x_{(n \cdot p + 1)} \right) & \text{für} \quad n \cdot p \in \mathbb{N} \end{cases}$$

erreicht werden, wobei $x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(n)}$ die gemäß der vorgegebenen Ordnung sortierte Urliste ist und mit $\lfloor y \rfloor$ für $y \in \mathbb{R}$ die größte ganze Zahl kleiner gleich y bezeichnet wird.

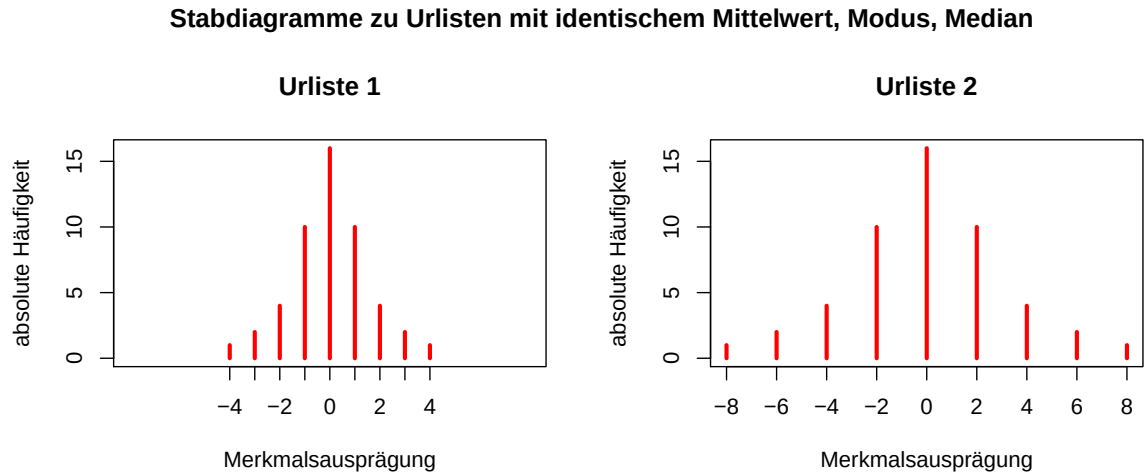
- Zum Beispiel ist für die (bereits sortierte) Urliste

$$6.77, 7.06, 8.84, 9.98, 11.87, 12.18, 12.7, 14.92$$

der Länge $n = 8$ das 0.25-Quantil $x_{0.25}$ wegen $n \cdot p = 8 \cdot 0.25 = 2 \in \mathbb{N}$ nicht eindeutig bestimmt, sondern alle Werte $x_{0.25} \in [7.06, 8.84]$ sind 0.25-Quantile. Die eindeutige Festlegung nach obiger Konvention würde dann die „Auswahl“ $x_{0.25} = \frac{1}{2}(7.06 + 8.84) = 7.95$ treffen.

Streuungsmaße I

- Verdichtung der Merkmalswerte auf einen Lageparameter als einzige Kennzahl recht unspezifisch.
- Starke Unterschiede trotz übereinstimmender Lagemaße möglich:



Streuungsmaße II

- Bei kardinalskalierten Merkmalen: zusätzliche Kennzahl für Variation bzw. Streuung der Merkmalswerte von Interesse
- Ähnlich wie bei Lagemaßen: verschiedene Streuungsmaße gängig
- Allen Streuungsmaßen gemeinsam:
  Bezug zu „Abstand“ zwischen Merkmalswerten
- *Ein* möglicher Abstand: (Betrag der) Differenz zwischen Merkmalswerten

Streuungsmaße III

Definition 3.6 (Spannweite, IQA, mittlere abs. Abweichung)

Seien $x_1, \ldots, x_n$ die Urliste zu einem kardinalskalierten Merkmal X, x_{med} der Median und $x_{0.25}$ bzw. $x_{0.75}$ das untere bzw. obere Quartil von X.
Dann heißt

1. $SP := \left(\max_{i\in\{1,\ldots,n\}} x_i\right) - \left(\min_{i\in\{1,\ldots,n\}} x_i\right) = x_{(n)} - x_{(1)}$ die **Spannweite** von X,
2. $IQA := x_{0.75} - x_{0.25}$ der **Interquartilsabstand (IQA)** von X,
3. $MAA := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |x_i - x_{\text{med}}|$ die **mittlere absolute Abweichung** von X.

Streuungsmaße IV

- Die Betragsstriche in Teil 1 und 2 von Definition 3.6 fehlen, da sie überflüssig sind.
- Um Eindeutigkeit in Teil 2 und 3 von Definition 3.6 zu erhalten, sind die für kardinalskalierte Merkmale üblichen Konventionen zur Berechnung von Median und Quantilen aus Folie 61 bzw. 76 anzuwenden.
- Verwendung von $\overline{x}$ statt x_{med} in Teil 3 von Definition 3.6 prinzipiell möglich, aber: Beachte Folie 72!
- Weiterer möglicher Abstand: Quadrate der Differenzen zwischen Merkmalswerten

Streuungsmaße V

Definition 3.7 (empirische Varianz, empirische Standardabweichung)

Seien $x_1, \ldots, x_n$ die Urliste zu einem kardinalskalierten Merkmal X, $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ das arithmetische Mittel von X. Dann heißt

1. $s^2 := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$ die **(empirische) Varianz** von X,
2. die (positive) Wurzel $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$ die **(empirische) Standardabweichung** von X.

Streuungsmaße VI

- Empirische Varianz bzw. Standardabweichung sind die gebräuchlichsten Streuungsmaße.
- Standardabweichung s hat dieselbe Dimension wie die Merkmalswerte, daher i.d.R. besser zu interpretieren als Varianz.
- Für Merkmale mit positivem Mittelwert $\overline{x}$ als relatives Streuungsmaß gebräuchlich: **Variationskoeffizient** $VK := \frac{s}{\overline{x}}$
- „Rechenregeln“ zur alternativen Berechnung von s bzw. s^2 vorhanden.

Satz 3.8 (Verschiebungssatz)

Seien $x_1, \ldots, x_n$ die Urliste zu einem kardinalskalierten Merkmal X, $\overline{x}$ das arithmetische Mittel und s^2 die empirische Varianz von X. Dann gilt

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \overline{x}^2$$

Streuungsmaße VII

- Mit der Schreibweise $\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ erhält man aus Satz 3.8 die kürzere Darstellung $s^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2$.
- Liegt zum Merkmal X die absolute Häufigkeitsverteilung $h(a)$ bzw. die relative Häufigkeitsverteilung $r(a)$ auf der Menge der Ausprägungen $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ vor, so kann s^2 auch durch

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m} h(a_j)\cdot(a_j - \overline{x})^2 = \sum_{j=1}^{m} r(a_j)\cdot(a_j - \overline{x})^2$$

  berechnet werden. (Berechnung von $\overline{x}$ dann mit Häufigkeiten als $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m} h(a_j)\cdot a_j = \sum_{j=1}^{m} r(a_j)\cdot a_j$, siehe Bemerkung 3.4 auf Folie 67)
- Natürlich kann alternativ auch Satz 3.8 verwendet und $\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ mit Hilfe der Häufigkeitsverteilung durch

$$\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m} h(a_j)\cdot a_j^2 = \sum_{j=1}^{m} r(a_j)\cdot a_j^2$$

  berechnet werden.

Empirische Varianz bei klassierten Daten

- Bei klassierten Daten: auch für empirische Varianz nur Approximation möglich.
- Analog zur Berechnung von s^2 aus Häufigkeitsverteilungen:
  - Näherungsweise Berechnung von s^2 aus Klassenmitten m_j und absoluten bzw. relativen Klassenhäufigkeiten h_j bzw. r_j der l Klassen als

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{l} h_j\cdot(m_j - \overline{x})^2 \quad \text{mit} \quad \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{l} h_j\cdot m_j$$

    bzw.

$$s^2 = \sum_{j=1}^{l} r_j\cdot(m_j - \overline{x})^2 \quad \text{mit} \quad \overline{x} = \sum_{j=1}^{l} r_j\cdot m_j \ .$$

  - Alternativ: Verwendung von Satz 3.8 mit

$$\overline{x} := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{l} h_j\cdot m_j = \sum_{j=1}^{l} r_j\cdot m_j$$

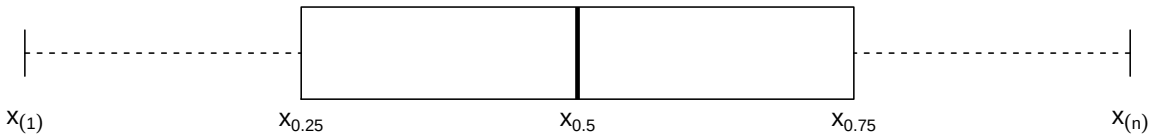
    und

$$\overline{x^2} := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{l} h_j\cdot m_j^2 = \sum_{j=1}^{l} r_j\cdot m_j^2 \ .$$

Box-and-whisker-Plot I

- Häufig von Interesse:
  Visueller Vergleich **eines** Merkmals für **verschiedene** statistische Massen
- Dazu nötig: Grafische Darstellung mit Ausdehnung (im Wesentlichen) nur in einer Dimension (2. Dimension für Nebeneinanderstellung der Datensätze)

⇝ **Box-and-whisker-Plot** oder kürzer **Box-Plot**:
Zur Urliste $x_1, \ldots, x_n$ eines kardinalskalierten Merkmals werden *im Prinzip* die 5 Kennzahlen $x_{(1)}, x_{0.25}, x_{0.5}, x_{0.75}, x_{(n)}$ in Form eines durch $x_{0.5}$ geteilten „Kästchens“ (Box) von $x_{0.25}$ bis $x_{0.75}$ und daran anschließende „Schnurrhaare“ (Whisker) bis zum kleinsten Merkmalswert $x_{(1)}$ und zum größten Merkmalswert $x_{(n)}$ dargestellt:

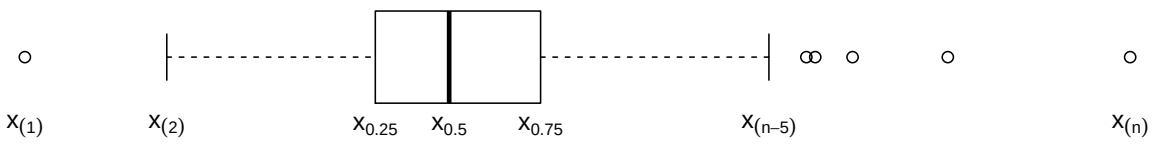


Box-and-whisker-Plot II

- (Häufig auftretende!) Ausnahme:
  $x_{(1)}$ und/oder $x_{(n)}$ liegen weiter als der 1.5-fache Interquartilsabstand (IQA) $x_{0.75} - x_{0.25}$ von der Box entfernt (also weiter als die 1.5-fache Breite der Box)

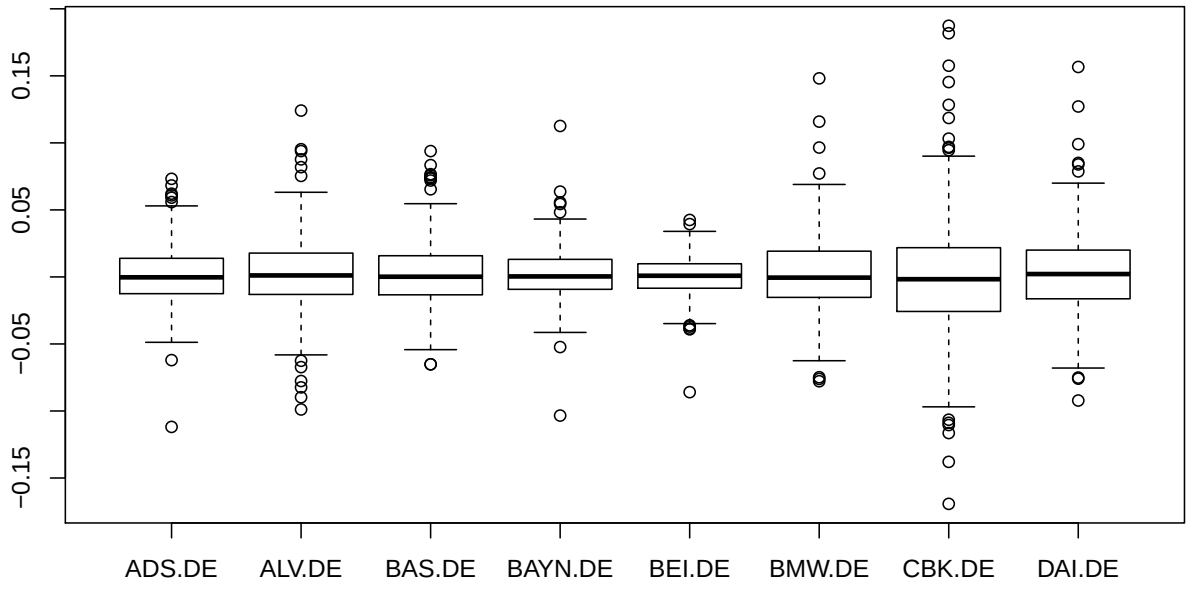
⇝ Dann: Whiskers nur bis zu äußersten Merkmalswerten innerhalb dieser Distanz und separates Eintragen der „Ausreißer“, d.h. aller Urlisteneinträge, die nicht von der Box und den Whiskers abgedeckt werden.

- Beispiel mit „Ausreißern“:



Box-and-whisker-Plot III

- Beispiel für Gegenüberstellung mehrerer Datensätze (Diskrete Tagesrenditen verschiedener DAX-Papiere)



Symmetrie(-maß), Schiefe I

- Neben Lage und Streuung bei kardinalskalierten Merkmalen auch interessant: **Symmetrie** (bzw. Asymmetrie oder Schiefe) und **Wölbung**
- Ein Merkmal X ist symmetrisch (um $\overline{x}$), wenn die Häufigkeitsverteilung von $X - \overline{x}$ mit der von $\overline{x} - X$ übereinstimmt.
  (Dabei ist mit $X - \overline{x}$ das Merkmal mit den Urlistenelementen $x_i - \overline{x}$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$ bezeichnet, dies gilt analog für $\overline{x} - X$.)
- Symmetrie eines Merkmals entspricht also der Achsensymmetrie des zugehörigen Stabdiagramms um $\overline{x}$.
- Ist ein Merkmal nicht symmetrisch, ist die **empirische Schiefe** bzw. **empirische Skewness** ein geeignetes Maß für die Stärke der Asymmetrie.

Symmetrie(-maß), Schiefe II

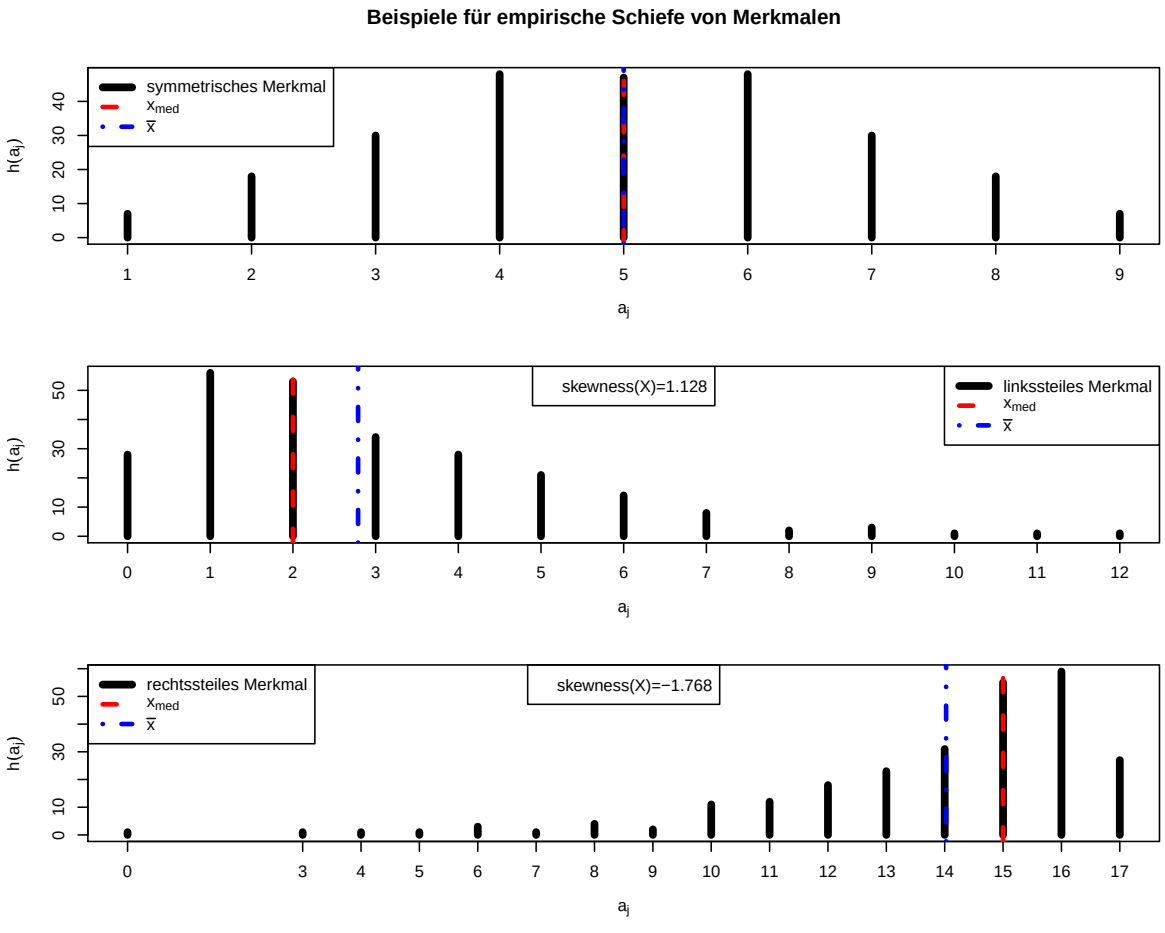
Definition 3.9 (empirische Schiefe, Skewness)

Sei X ein Merkmal mit der Urliste $x_1, \ldots, x_n$. Dann heißt

$$\text{skewness}(X) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i - \overline{x}}{s} \right)^3$$

mit $\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$ und $s = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}$ die **empirische Schiefe (Skewness)** von X.

- Man kann zeigen: X symmetrisch $\Rightarrow \text{skewness}(X) = 0$
- X heißt **linkssteil** oder **rechtsschief**, falls $\text{skewness}(X) > 0$.
- X heißt **rechtssteil** oder **linksschief**, falls $\text{skewness}(X) < 0$.
- Für symmetrische Merkmale ist $\overline{x}$ gleichzeitig Median von X, bei linkssteilen Merkmalen gilt *tendenziell* $\overline{x} > x_{\text{med}}$, bei rechtssteilen *tendenziell* $\overline{x} < x_{\text{med}}$.



Wölbungsmaß (Kurtosis) I

Definition 3.10 (empirische Wölbung, Kurtosis)

Sei X ein Merkmal mit der Urliste $x_1, \ldots, x_n$. Dann heißt

$$\text{kurtosis}(X) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i - \overline{x}}{s} \right)^4$$

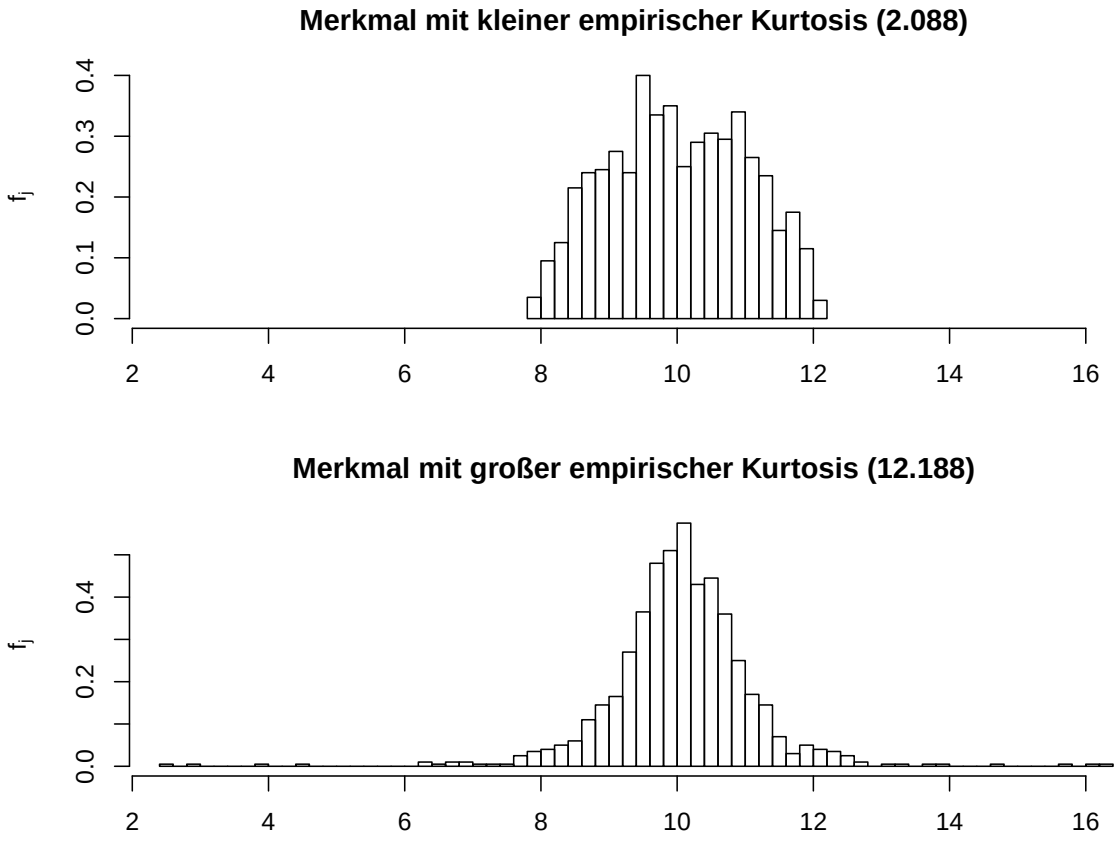
mit $\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$ und $s = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}$ die **empirische Wölbung (Kurtosis)** von X.

- Kurtosis misst bei Merkmalen mit *einem* Modalwert, wie „flach“ (kleiner Wert) bzw. „spitz“ (großer Wert) der „Gipfel“ um diesen Modalwert ist.

Wölbungsmaß (Kurtosis) II

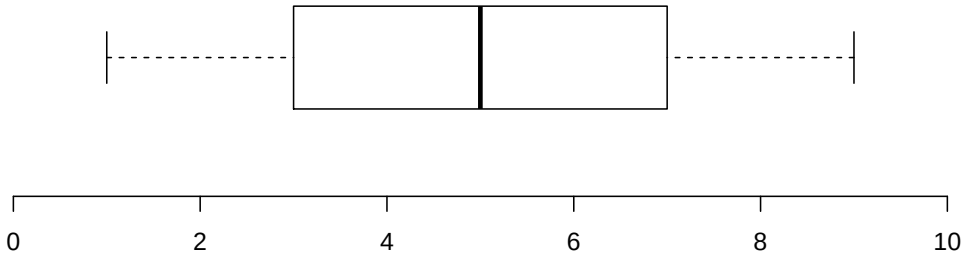
- Bei gleicher mittlerer quadratischer Abweichung vom Mittelwert ($\rightsquigarrow$ Varianz) müssen Merkmale mit größerer emp. Kurtosis (mehr Werten in der Nähe des Gipfels) auch mehr weit vom Gipfel entfernte Merkmalswerte besitzen.
- Der Wert 3 wird als „normaler“ Wert für die empirische Kurtosis angenommen, Merkmale mit $1 \leq \text{kurtosis}(X) < 3$ heißen platykurtisch, Merkmale mit $\text{kurtosis}(X) > 3$ leptokurtisch.
- *Vorsicht:* Statt der Kurtosis von X wird oft die **Exzess-Kurtosis** von X angegeben, die der um den Wert 3 verminderten Kurtosis entspricht.

Beispiele für Merkmale mit unterschiedlicher empirischer Kurtosis



Schiefe und Wölbung in grafischen Darstellungen I

- Box-Plots lassen auch auf empirische Schiefe und Kurtosis schließen.
- Bei symmetrischen Merkmalen sind auch die Box-Plots symmetrisch.
  Beispiel: Box-Plot zur Urliste $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$:

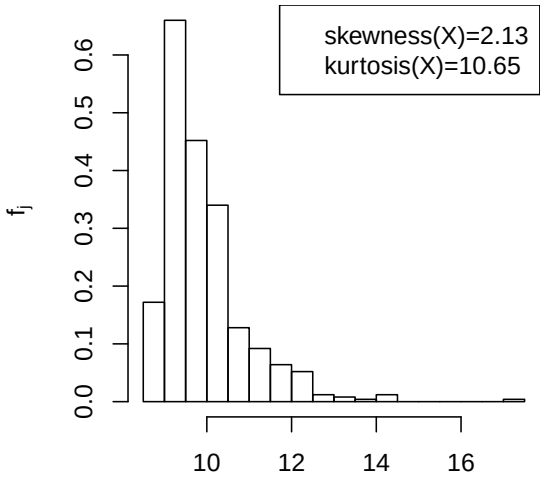


Schiefe und Wölbung in grafischen Darstellungen II

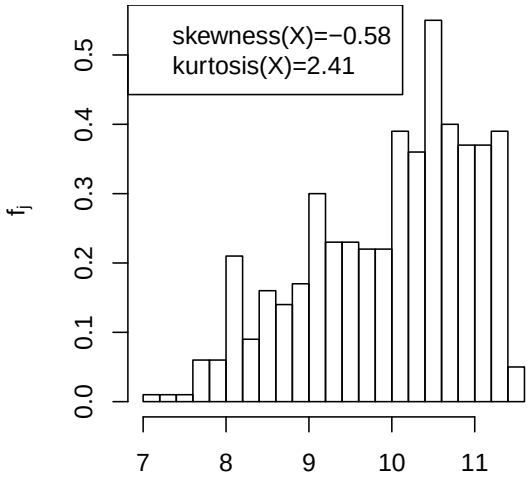
- Bei linkssteilen Merkmalen hat *tendenziell* der rechte/obere Teil (rechter/oberer Teil der Box und rechter/oberer Whisker) eine **größere** Ausdehnung als der linke/untere Teil.
- Bei rechtssteilen Merkmalen hat *tendenziell* der rechte/obere Teil (rechter/oberer Teil der Box und rechter/oberer Whisker) eine **kleinere** Ausdehnung als der linke/untere Teil.
- Bei Merkmalen mit **großer** empirischer Kurtosis gibt es *tendenziell* **viele** „Ausreißer“, also separat eingetragene Merkmalswerte außerhalb der Whiskers (wenigstens auf einer Seite).
- Bei Merkmalen mit **kleiner** empirischer Kurtosis gibt es häufig **wenige** oder **gar keine** „Ausreißer“.

- Beispiele für Merkmale mit unterschiedlicher empirischer Schiefe/Kurtosis

Linkssteil mit großer emp. Kurtosis



Rechtssteil mit kleiner emp. Kurtosis



- Zugehörige Box-Plots: