**Universität des Saarlandes**
**Lehrstab Statistik**
**Dr. Martin Becker**

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

**12. Übungsblatt zur Vorlesung**
**Deskriptive Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung SS 2018**

## Aufgabe 56

Gegeben sei die (bereits um die Randwahrscheinlichkeiten ergänzte) gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung des diskreten zweidimensionalen Zufallsvektors $(X, Y)$ aus Aufgabe 54 wie folgt:

| $X$ \ $Y$ | 1 | 2 | 3 | $p_{i\cdot}$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.02 | 0.13 | 0.15 | 0.30 |
| 2 | 0.16 | 0.20 | 0.14 | 0.50 |
| 3 | 0.12 | 0.04 | 0.04 | 0.20 |
| $p_{\cdot j}$ | 0.30 | 0.37 | 0.33 | 1 |

(a) Geben Sie die bedingten Wahrscheinlichkeitsverteilungen von $X$ unter der Bedingung $Y = y_j$ für alle $y_j \in T(Y)$ über die zugehörigen (bedingten) Wahrscheinlichkeitsfunktionen an.

(b) Sind $X$ und $Y$ stochastisch unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort mit den Resultaten aus Teil (a)!

## Aufgabe 57

Der zweidimensionale Zufallsvektor $(X, Y)$ habe die folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:

| $X$ \ $Y$ | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1/6 | 0 | 1/6 |
| 2 | 1/12 | 1/3 | 0 |
| 3 | 0 | 1/6 | 1/12 |

(a) Berechnen Sie die Erwartungswerte $\mathrm{E}(X)$ und $\mathrm{E}(Y)$ sowie die Varianzen $\mathrm{Var}(X)$ und $\mathrm{Var}(Y)$.

(b) Berechnen Sie die Kovarianz $\mathrm{Cov}(X, Y)$ und den Korrelationskoeffizenten $\mathrm{Korr}(X, Y)$.

Aufgabe 58

Der zweidimensionale Zufallsvektor $(X,Y)$ besitze die folgende gemeinsame Dichtefunktion:

$$f_{(X,Y)}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R};\, f_{(X,Y)}(x,y)=\begin{cases} y-x+1 & \text{für } 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie eine Randdichte $f_X$ von $X$ sowie eine Randdichte $f_Y$ von $Y$.

(b) Vergleichen Sie das Produkt der beiden Randdichten mit der angegebenen gemeinsamen Dichtefunktion. Sind $X$ und $Y$ stochastisch unabhängig?

(c) Geben Sie für $0\le y\le 1$ bedingte Dichtefunktionen $f_{X|Y=y}$ von $X$ gegeben $Y=y$ an.

(d) Berechnen Sie die Erwartungswerte und Varianzen von $X$ und $Y$.

(e) Berechnen Sie die Kovarianz sowie den Korrelationskoeffizienten von $X$ und $Y$.

Aufgabe 59

Gegeben sei ein zweidimensionaler Zufallsvektor $(X,Y)$ mit $X\sim N(4,2^2)$ und $Y\sim \mathrm{Exp}(0.5)$, das heißt, die Randverteilungen von $X$ bzw. $Y$ seien eine Normalverteilung mit Parametern $\mu_X=4$ und $\sigma_X^2=2^2$ bzw. eine Exponentialverteilung mit Parameter $\lambda_Y=0.5$.

(a) In welchem Bereich muss die Kovarianz $\mathrm{Cov}(X,Y)$ liegen?

(b) Es sei nun bekannt, dass $\mathrm{Korr}(X,Y)=0.5$ gilt. Berechnen Sie:

  (i) $\mathrm{Cov}(4X,-2Y)$,

  (ii) $\mathrm{E}(4X-2Y+2)$,

  (iii) $\mathrm{Var}(4X-2Y+2)$.

(c) Bestimmen Sie den Erwartungswert von $4X^2-4Y^2$.