

# Inhaltsverzeichnis

(Ausschnitt)

## 10 Mehrdimensionale Zufallsvariablen

- Borelsche sigma-Algebra
- Diskrete Zufallsvektoren
- Stetige Zufallsvektoren
- Randverteilungen
- (Stochastische) Unabhängigkeit
- Bedingte Verteilungen
- Momente zweidimensionaler Zufallsvektoren
- Momente höherdimensionaler Zufallsvektoren

# Mehrdimensionale Zufallsvariablen/Zufallsvektoren I

- Im Folgenden: *Simultane Betrachtung mehrerer* (endlich vieler) Zufallsvariablen über *demselben* Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .
- Ist  $n \in \mathbb{N}$  die Anzahl der betrachteten Zufallsvariablen, so fasst man die  $n$  Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  in einem  $n$ -dimensionalen Vektor  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)'$  zusammen.
- Damit ist  $\mathbb{R}^n$  der Wertebereich der Abbildung  $\mathbf{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ , als  $\sigma$ -Algebra über  $\mathbb{R}^n$  wählt man die  $n$ -dimensionale Borelsche  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{B}^n$ , in der alle karthesischen Produkte von  $n$  Elementen aus  $\mathcal{B}$  enthalten sind.
- Insbesondere enthält  $\mathcal{B}^n$  alle endlichen und abzählbar unendlichen Teilmengen von  $\mathbb{R}^n$  sowie alle karthesischen Produkte von  $n$  Intervallen aus  $\mathbb{R}$ .
- Damit lassen sich die meisten bekannten Konzepte eindimensionaler Zufallsvariablen leicht übertragen.
- Ähnlich zur Situation bei mehrdimensionalen Merkmalen in der deskriptiven Statistik werden viele Darstellungen im Fall  $n > 2$  allerdings schwierig.

# Mehrdimensionale Zufallsvariablen/Zufallsvektoren II

## Definition 10.1 (Zufallsvektor, Mehrdimensionale Zufallsvariable)

Seien  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum,  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\mathbf{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n : \mathbf{X}(\omega) = (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))'$$

eine  $\mathcal{F} - \mathcal{B}^n$ -messbare Abbildung. Dann heißen  $\mathbf{X}$   **$n$ -dimensionale Zufallsvariable** bzw.  **$n$ -dimensionaler Zufallsvektor** über  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  und die gemäß Definition 8.3 gebildete Bildwahrscheinlichkeit

$$P_{\mathbf{X}} : \mathcal{B}^n \rightarrow \mathbb{R}; \mathbf{B} \mapsto P(\mathbf{X}^{-1}(\mathbf{B}))$$

(**gemeinsame**) **Wahrscheinlichkeitsverteilung** oder kürzer (**gemeinsame**) **Verteilung** von  $\mathbf{X}$ .  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n, P_{\mathbf{X}})$  ist damit ebenfalls ein Wahrscheinlichkeitsraum. Liegt nach Durchführung des Zufallsexperiments  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  das Ergebnis  $\omega \in \Omega$  vor, so heißt der zugehörige Wert  $\mathbf{x} = \mathbf{X}(\omega)$  die **Realisierung** oder **Realisation** von  $\mathbf{X}$ .

# Mehrdimensionale Zufallsvariablen/Zufallsvektoren III

- Wie im eindimensionalen Fall sind Kurzschreibweisen (zum Beispiel) der Form

$$P\{X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n\} := P_{\mathbf{X}}((-\infty, x_1] \times \dots \times (-\infty, x_n])$$

für  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  geläufig.

- Auch hier legen die Wahrscheinlichkeiten solcher Ereignisse die Verteilung des  $n$ -dimensionalen Zufallsvektors bereits eindeutig fest, und man definiert analog zum eindimensionalen Fall die gemeinsame Verteilungsfunktion

$$F_{\mathbf{X}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}; F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) := P_{\mathbf{X}}((-\infty, x_1] \times \dots \times (-\infty, x_n]) .$$

- Gemeinsame Verteilungsfunktionen mehrdimensionaler Zufallsvariablen sind allerdings für den praktischen Einsatz im Vergleich zur eindimensionalen Variante relativ unbedeutend und werden daher hier nicht weiter besprochen.

# Diskrete Zufallsvektoren I

- Ist analog zum eindimensionalen Fall

$$\mathbf{X}(\Omega) := \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} = \mathbf{X}(\omega) \text{ für (mindestens) ein } \omega \in \Omega\}$$

endlich oder abzählbar unendlich bzw. existiert (wiederum etwas allgemeiner) eine endliche oder abzählbar unendliche Menge  $\mathbf{B} \subseteq \mathbb{R}^n$  mit  $P(\{\mathbf{X} \in \mathbf{B}\}) = 1$ , so nennt man auch solche Zufallsvektoren „diskret“.

- Mit Hilfe einer (mehrdimensionalen) Wahrscheinlichkeitsfunktion  $p_{\mathbf{X}}$  mit  $p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) := P_{\mathbf{X}}(\{\mathbf{x}\})$  für  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  können Wahrscheinlichkeiten  $P\{\mathbf{X} \in \mathbf{A}\}$  für Ereignisse  $\mathbf{A} \in \mathcal{B}^n$  wiederum durch Aufsummieren der Punktwahrscheinlichkeiten aller Trägerpunkte  $\mathbf{x}_i$  mit  $\mathbf{x}_i \in \mathbf{A}$  berechnet werden, also durch:

$$P\{\mathbf{X} \in \mathbf{A}\} = \sum_{\mathbf{x}_i \in \mathbf{A} \cap T(\mathbf{X})} p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_i) \quad \text{für alle } \mathbf{A} \in \mathcal{B}^n$$

# Diskrete Zufallsvektoren II

## Definition 10.2 (Diskreter Zufallsvektor)

Seien  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbf{X}$  ein  $n$ -dimensionaler Zufallsvektor über  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  und  $\mathbf{B} \subseteq \mathbb{R}^n$  endlich oder abzählbar unendlich mit  $P(\{\mathbf{X} \in \mathbf{B}\}) = 1$ . Dann nennt man

- ▶  $\mathbf{X}$  einen **diskreten** Zufallsvektor,
- ▶  $p_{\mathbf{X}} : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ ;  $p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) := P_{\mathbf{X}}(\{\mathbf{x}\})$  die **(gemeinsame) Wahrscheinlichkeitsfunktion** von  $\mathbf{X}$ ,
- ▶  $T(\mathbf{X}) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) > 0\}$  den **Träger** von  $\mathbf{X}$  sowie alle Elemente  $\mathbf{x} \in T(\mathbf{X})$  **Trägerpunkte** von  $\mathbf{X}$  und deren zugehörige Wahrscheinlichkeitsfunktionswerte  $p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$  **Punktwahrscheinlichkeiten**.

# Stetige Zufallsvektoren I

- Zweiter wichtiger Spezialfall (wie im eindimensionalen Fall):  
**stetige**  $n$ -dimensionale Zufallsvektoren **X**
- Wiederum gilt  $P_{\mathbf{X}}(\mathbf{B}) = 0$  *insbesondere* für alle endlichen oder abzählbar unendlichen Teilmengen  $\mathbf{B} \subseteq \mathbb{R}^n$ .
- Auch hier ist die definierende Eigenschaft die Möglichkeit zur Berechnung spezieller Wahrscheinlichkeiten als Integral über eine (nun mehrdimensionale) Dichtefunktion.
- In Verallgemeinerung der Berechnung von *Intervallwahrscheinlichkeiten* im eindimensionalen Fall müssen nun *Wahrscheinlichkeiten von Quadern* als (Mehrfach-)Integral über eine Dichtefunktion berechnet werden können.

# Stetige Zufallsvektoren II

## Definition 10.3 (Stetiger Zufallsvektor, (gemeinsame) Dichtefunktion)

Seien  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum,  $n \in \mathbb{N}$  und  $\mathbf{X}$  ein  $n$ -dimensionaler Zufallsvektor über  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Gibt es eine nichtnegative Abbildung  $f_{\mathbf{X}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$P_{\mathbf{X}}(\mathbf{A}) = \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} f_{\mathbf{X}}(t_1, \dots, t_n) dt_n \cdots dt_1 \quad (5)$$

für alle Quader  $\mathbf{A} = (a_1, b_1] \times \cdots \times (a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$  mit  $a_1 \leq b_1, \dots, a_n \leq b_n$ , so heißt der Zufallsvektor  $\mathbf{X}$  **stetig**. Jede nichtnegative Abbildung  $f_{\mathbf{X}}$  mit der Eigenschaft (5) heißt **(gemeinsame) Dichtefunktion** von  $\mathbf{X}$ .