

# Inhaltsverzeichnis

(Ausschnitt)

## 6 Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume

- Laplacesche Wahrscheinlichkeitsräume
- Kombinatorik
- Allgemeine diskrete Wahrscheinlichkeitsräume

## Laplacesche Wahrscheinlichkeitsräume II

- Das **Laplacesche Wahrscheinlichkeitsmaß**  $P$  ergibt sich dann als:

$$P : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}; P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

- Wahrscheinlichkeit  $P(A)$  eines Ereignisses  $A$  ist also der Quotient

$$\frac{\text{Anzahl der im Ereignis } A \text{ enthaltenen Ergebnisse}}{\text{Anzahl aller möglichen Ergebnisse}}$$

bzw.

$$\frac{\text{Anzahl der (für Ereignis } A \text{) günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der (insgesamt) möglichen Fälle}}$$

- Einzige Schwierigkeit: **Zählen!**

# Laplacesche Wahrscheinlichkeitsräume I

- Einfachster Fall für  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  (wie in Würfel-Beispiel):
  - ▶  $\Omega$  endlich,
  - ▶ Eintritt aller Ergebnisse  $\omega \in \Omega$  gleichwahrscheinlich.
- Wahrscheinlichkeitsräume mit dieser Eigenschaft heißen **Laplacesche Wahrscheinlichkeitsräume**.
- Als  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{F}$  kann stets  $\mathcal{P}(\Omega)$  angenommen werden. Insbesondere ist also jede beliebige Teilmenge von  $\Omega$  ein Ereignis, dessen Eintrittswahrscheinlichkeit berechnet werden kann.

## Kombinatorik

- Disziplin, die sich mit „Zählen“ beschäftigt: **Kombinatorik**
- Verwendung allgemeiner Prinzipien und Modelle als Hilfestellung zum Zählen in konkreten Anwendungen.

### Satz 6.1 (Additionsprinzip, Multiplikationsprinzip)

Sei  $r \in \mathbb{N}$ , seien  $M_1, M_2, \dots, M_r$  (jeweils) endliche Mengen.

- ▶ Ist  $M_i \cap M_j = \emptyset$  für alle  $i \neq j$ , dann gilt das **Additionsprinzip**

$$|M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_r| = |M_1| + |M_2| + \dots + |M_r|.$$

- ▶ Mit  $M_1 \times M_2 \times \dots \times M_r := \{(m_1, \dots, m_r) \mid m_1 \in M_1, \dots, m_r \in M_r\}$  gilt das **Multiplikationsprinzip**

$$|M_1 \times M_2 \times \dots \times M_r| = |M_1| \cdot |M_2| \cdot \dots \cdot |M_r|$$

und im Fall  $M = M_1 = M_2 = \dots = M_r$  mit  $M^r := \underbrace{M \times M \times \dots \times M}_{r\text{-mal}}$  spezieller

$$|M^r| = |M|^r.$$

## Definition 6.2 (Fakultät, Binomialkoeffizient)

- 1 Mit  $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$  sei die Menge der natürlichen Zahlen einschließlich Null bezeichnet.
- 2 Für jedes  $n \in \mathbb{N}_0$  definiert man die Zahl  $n! \in \mathbb{N}$  (gelesen „**n-Fakultät**“) rekursiv durch
  - $0! := 1$  und
  - $(n+1)! := (n+1) \cdot n!$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ .
- 3 Für  $n, r \in \mathbb{N}_0$  mit  $0 \leq r \leq n$  definiert man die Zahl  $(n)_r$  (gelesen „**n tief r**“) durch

$$(n)_r := \frac{n!}{(n-r)!} = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-r+1).$$

- 4 Für  $n, r \in \mathbb{N}_0$  und  $0 \leq r \leq n$  definiert man den **Binomialkoeffizienten**  $\binom{n}{r}$  (gelesen „**n über r**“) durch

$$\binom{n}{r} := \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}.$$

## Modelle zum Zählen II

- **Alternatives Modell:**  
*Wie viele Möglichkeiten gibt es,  $r$  Murmeln in  $n$  unterscheidbare (z. B. von 1 bis  $n$  nummerierte) Schubladen zu verteilen.*  
*Achtung: Auch als weiteres Urnenmodell (Verteilen von  $r$  Kugeln auf  $n$  Urnen) geläufig!*
- Varianten:
  - Sind (auch) die Murmeln unterscheidbar?
  - Dürfen mehrere Murmeln pro Schublade (Mehrfachbelegungen) vorhanden sein?
- Beide Modelle entsprechen sich (einschließlich ihrer Varianten)!
- Im Folgenden (zur Vereinfachung der Darstellung):  
 Identifizieren von endlichen Mengen der Mächtigkeit  $n$  mit der Menge  $\mathbb{N}_n := \{1, 2, \dots, n\}$  der ersten  $n$  natürlichen Zahlen.

## Modelle zum Zählen I

- Gebräuchliches (Hilfs-)Modell zum Zählen: **Urnenmodell:**  
*Wie viele Möglichkeiten gibt es,  $r$  mal aus einer Urne mit  $n$  unterscheidbaren (z.B. von 1 bis  $n$  nummerierten) Kugeln zu ziehen?*
- Varianten:
  - Ist die Reihenfolge der Ziehungen relevant?
  - Wird die Kugel nach jeder Ziehung wieder in die Urne zurückgelegt?

## Variante I

„geordnete Probe (Variation) mit Wiederholung“

- Ziehen **mit Zurücklegen** und **mit** Berücksichtigung der **Reihenfolge**.  
*Für jede der  $r$  Ziehungen  $n$  Möglichkeiten, Multiplikationsprinzip anwenden.*

- Anzahl der Möglichkeiten:

$${}^w_n V_r := \underbrace{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_{r \text{ Faktoren}} = n^r$$

- Formale Darstellung aller Möglichkeiten:

$$\{(m_1, \dots, m_r) \mid m_1, \dots, m_r \in \mathbb{N}_n\} = \mathbb{N}_n^r$$

- gleichbedeutend: Verteilen von **unterscheidbaren** Murmeln **mit** Zulassung von **Mehrfachbelegungen**

## Variante II

„geordnete Probe (Variation) ohne Wiederholung“

- Ziehen **ohne Zurücklegen** und **mit** Berücksichtigung der **Reihenfolge**.  
Für erste Ziehung  $n$  Möglichkeiten, für zweite  $n - 1$ , ..., für  $r$ -te Ziehung  $n - r + 1$  Möglichkeiten, Multiplikationsprinzip anwenden.
- Anzahl der Möglichkeiten:

$${}_nV_r := n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!} = (n)_r$$

- Formale Darstellung aller Möglichkeiten:

$$\{(m_1, \dots, m_r) \in \mathbb{N}_n^r \mid m_i \neq m_j \text{ für } i \neq j, 1 \leq i, j \leq r\}$$

- gleichbedeutend: Verteilen von **unterscheidbaren** Murmeln **ohne** Zulassung von **Mehrfachbelegungen**
- Spezialfall:**  $n = r$ 
  - $\rightsquigarrow$   $n!$  verschiedene Möglichkeiten
    - entspricht (Anzahl der) möglichen Anordnungen (**Permutationen**) von  $n$  unterscheidbaren Kugeln bzw.  $n$  unterscheidbaren Murmeln

## Variante IV

„ungeordnete Probe (Kombination) mit Wiederholung“

- Ziehen **mit Zurücklegen** und **ohne** Berücksichtigung der **Reihenfolge**.  
*Verständnis schwieriger!*  
Vorstellung: Erstelle „Strichliste“ mit  $r$  Strichen, verteilt auf  $n$  Felder (eines für jede Kugel)  $\rightsquigarrow$   $r$  Striche zwischen  $n - 1$  „Feldbegrenzungen“. Anzahl Möglichkeiten entspricht Anzahl der Möglichkeiten, die  $r$  Striche in der „Reihung“ der  $n - 1 + r$  Striche & Feldbegrenzungen zu positionieren.
- Anzahl der Möglichkeiten:

$${}_n^wC_r := \binom{n+r-1}{r} = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!} = \frac{(n+r-1) \cdot (n+r-2) \cdot \dots \cdot n}{r \cdot (r-1) \cdot \dots \cdot 1}$$

- Formale Darstellung aller Möglichkeiten:

$$\{(m_1, \dots, m_r) \in \mathbb{N}_n^r \mid m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_r\}$$

- gleichbedeutend: Verteilen von **nicht unterscheidbaren** Murmeln **mit** Zulassung von **Mehrfachbelegungen**
- Achtung:** Üblicherweise **nicht** geeignet als  $\Omega$  in Laplaceschen Wahrscheinlichkeitsräumen, da die verschiedenen Möglichkeiten bei üblichen Ziehungsvorgängen nicht alle gleichwahrscheinlich sind!

## Variante III

„ungeordnete Probe (Kombination) ohne Wiederholung“

- Ziehen **ohne Zurücklegen** und **ohne** Berücksichtigung der **Reihenfolge**.  
Wie in Variante 2: Für erste Ziehung  $n$  Möglichkeiten, für zweite  $n - 1$ , ..., für  $r$ -te Ziehung  $n - r + 1$  Möglichkeiten, Multiplikationsprinzip anwenden;  
**aber:** je  $r!$  Möglichkeiten unterscheiden sich nur durch die (nicht zu berücksichtigende!) Reihenfolge.
- Anzahl der Möglichkeiten:

$${}_nC_r := \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-r+1)}{r \cdot (r-1) \cdot \dots \cdot 1} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r}$$

- Formale Darstellung aller Möglichkeiten:

$$\{(m_1, \dots, m_r) \in \mathbb{N}_n^r \mid m_1 < m_2 < \dots < m_r\}$$

- gleichbedeutend: Verteilen von **nicht unterscheidbaren** Murmeln **ohne** Zulassung von **Mehrfachbelegungen**
- Häufig Anwendung bei *gleichzeitigem* Ziehen von  $r$  aus  $n$  Objekten bzw. simultane Auswahl von  $r$  aus  $n$  Plätzen; Anzahl der Möglichkeiten entspricht Anzahl  $r$ -elementiger Teilmengen aus  $n$ -elementiger Menge.

## Übersicht der Varianten I–IV

vgl. Ulrich Krenzel, Einführung in die W.-Theorie und Statistik, 7. Aufl., Vieweg, Wiesbaden, 2003

$r$ unterscheidbare Kugeln aus Urne mit $n$ (unterscheidbaren) Kugeln	<b>mit</b> Zurücklegen	<b>ohne</b> Zurücklegen	
<b>mit</b> Berücksichtigung der Reihenfolge	Variante I ${}_nV_r = n^r$	Variante II ${}_nV_r = (n)_r$	<b>unterscheidbare</b> Murmeln
<b>ohne</b> Berücksichtigung der Reihenfolge	Variante IV ${}_n^wC_r = \binom{n+r-1}{r}$	Variante III ${}_nC_r = \binom{n}{r}$	<b>nicht unterscheidbare</b> Murmeln
	<b>mit</b> Mehrfachbesetzung	<b>ohne</b> Mehrfachbesetzung	$r$ Murmeln in $n$ unterscheidbare Schubladen

## Bemerkungen

- Wird ohne Zurücklegen gezogen, muss natürlich  $r \leq n$  gefordert werden!  
(Es können insgesamt nicht mehr Kugeln entnommen werden, als zu Beginn in der Urne enthalten waren.)
- Werden **alle** Kugeln ohne Zurücklegen unter Berücksichtigung der Reihenfolge entnommen, wird häufig folgende Verallgemeinerung betrachtet:
  - ▶ Nicht alle  $n$  Kugeln sind unterscheidbar (durchnummeriert).
  - ▶ Es gibt  $m < n$  (unterscheidbare) Gruppen von Kugeln, die jeweils  $n_1, n_2, \dots, n_m$  **nicht** unterscheidbare Kugeln umfassen (mit  $n = \sum_{i=1}^m n_i$ ).
  - ▶ Da es jeweils  $n_1!, n_2!, \dots, n_m!$  nicht unterscheidbare Anordnungen der Kugeln innerhalb der Gruppen gibt, reduziert sich die Anzahl der insgesamt vorhandenen Möglichkeiten von  ${}_n P := {}_n V_n = n!$  auf

$${}_n P_{n_1, n_2, \dots, n_m} := \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_m!}.$$

- ▶ Typische Anwendung: Buchstabenanordnungen bei „Scrabble“
- ▶ Nenner von  ${}_n P_{n_1, n_2, \dots, n_m}$  liefert Anzahl der Möglichkeiten für jeweils nicht unterscheidbare Anordnungen.

## Beispiele

- **Lottospiel „6 aus 49“** (ohne Berücksichtigung einer Zusatzzahl)
  - ▶ Interessierendes Ereignis  $A$ : (Genau) 3 „Richtige“
  - ▶  $|\Omega| = \binom{49}{6} = 13983816$ ,  $|A| = \binom{6}{3} \cdot \binom{43}{3} = 246820$
  - ▶  $P(A) = \frac{\binom{6}{3} \cdot \binom{43}{3}}{\binom{49}{6}} = 0.01765 = 1.765\%$
- Anzahl der Möglichkeiten bei **zweimaligem Würfelwurf**
  - ▶ wenn die Reihenfolge irrelevant (z.B. bei gleichzeitigem Werfen) ist:
    - ▶  $|\Omega| = \binom{6+2-1}{2} = 21$
    - ▶ **Vorsicht: nicht alle Ergebnisse gleichwahrscheinlich!**
  - ▶ wenn die Reihenfolge relevant ist:
    - ▶  $|\Omega| = 6^2 = 36$
- **Geburtsstage**  
Zusammensetzung der Geburtsstage (ohne Jahreszahl; Vernachlässigung von Schaltjahren) bei  $r$  Personen (mit Reihenfolgeberücksichtigung)
  - ▶ Interessierendes Ereignis  $A_r$ : alle  $r$  Personen haben verschiedene Geburtsstage
  - ▶  $|\Omega_r| = 365^r$ ,  $|A_r| = (365)_r$  für  $r \leq 365$ ,  $|A_r| = 0$  sonst.
  - ▶  $P(A_r) = \frac{(365)_r}{365^r}$  für  $r \leq 365$ ,  $P(A_r) = 0$  sonst.

- Anwendung der Kombinatorik in Laplaceschen Wahrscheinlichkeitsräumen:
  - ▶ Auswahl eines geeigneten Ergebnisraums  $\Omega$  mit **gleichwahrscheinlichen** Ausgängen des Zufallsexperiments.
  - ▶ Bestimmen von  $|\Omega|$  mit kombinatorischen Hilfsmitteln.
  - ▶ Bestimmen von  $|A|$  für interessierende Ereignisse  $A \subseteq \Omega$  mit kombinatorischen Hilfsmitteln.
- Häufig gibt es nicht **die** richtige Lösung, sondern mehrere, da oft mehrere Modelle (mehr oder weniger) geeignet sind.
- Wird aber beispielsweise  $\Omega$  unter Berücksichtigung der Ziehungsreihenfolge konstruiert, obwohl die Reihenfolge für das interessierende Ereignis  $A$  unwichtig ist, müssen unterschiedliche mögliche Anordnungen bei der Konstruktion von  $A$  ebenfalls berücksichtigt werden!
- Trotz vorhandener (und nützlicher) Modelle:
  - ▶ *Richtiges Zählen hat häufig „Knobelcharacter“, stures Einsetzen in Formeln selten ausreichend, Mitdenken erforderlich!*

Geburtsstagsbeispiel

