

# Inhaltsverzeichnis

(Ausschnitt)

## 4 Zweidimensionale Daten

- Häufigkeitsverteilungen unklassierter Daten
- Häufigkeitsverteilungen klassierter Daten
- Bedingte Häufigkeitsverteilungen und Unabhängigkeit
- Abhängigkeitsmaße

# Auswertungsmethoden für mehrdimensionale Daten I

- Werden zu einer statistischen Masse mehrere Merkmale erhoben, so können diese natürlich individuell mit den Methoden für einzelne Merkmale ausgewertet werden.
- Eine Menge von Kennzahlen in den Spalten kann zum Beispiel gegen eine Menge von Merkmalen in den Zeilen tabelliert werden:

BMW.DE	$x_{(1)}$	$x_{0.5}$	$x_{(n)}$	$\bar{x}$	s	IQA	Schiefe	Kurt.
Preise	17.610	28.040	35.940	27.967	4.974	8.015	-0.383	1.932
log-Preise	2.868	3.334	3.582	3.314	0.189	0.286	-0.618	2.258
Renditen	-0.078	-0.001	0.148	0.002	0.030	0.034	0.672	5.941
log-Renditen	-0.081	-0.001	0.138	0.001	0.029	0.034	0.484	5.396

- Liegen die Merkmalswerte jeweils in ähnlichen Wertebereichen, ist auch ein Box-Plot verschiedener Merkmale nützlich.

# Auswertungsmethoden für mehrdimensionale Daten II

- Isolierte Betrachtung der einzelnen Merkmale kann allerdings Abhängigkeiten zwischen mehreren Merkmalen nicht erkennbar machen!
  - Zur Untersuchung von Abhängigkeiten mehrerer Merkmale „simultane“ Betrachtung der Merkmale erforderlich.
  - Gemeinsame Betrachtung von mehr als 2 Merkmalen allerdings technisch schwierig.
- ↪ Spezielle Methoden für **zweidimensionale** Daten (2 Merkmale simultan)

# Häufigkeitsverteilungen zweidimensionaler Daten I

- Im Folgenden wird angenommen, dass den Merkmalsträgern zu **zwei** Merkmalen  $X$  und  $Y$  Merkmalswerte zugeordnet werden, also ein **zweidimensionales Merkmal**  $(X, Y)$  vorliegt.
- Analog zum eindimensionalen Fall geht man davon aus, auch vor der Erhebung schon Mengen  $M_1$  bzw.  $M_2$  angeben zu können, die alle vorstellbaren Merkmalswerte des Merkmals  $X$  bzw.  $Y$  enthalten.
- Die Urliste der Länge  $n$  (zur statistischen Masse der Mächtigkeit  $n$ ) besteht nun aus den  $n$  Paaren

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$$

mit  $x_m \in M_1$  und  $y_m \in M_2$  bzw.  $(x_m, y_m) \in M_1 \times M_2$  für  $m \in \{1, \dots, n\}$ .

# Häufigkeitsverteilungen zweidimensionaler Daten II

- *Unverzichtbare Eigenschaft der Urliste ist, dass die Paare von Merkmalswerten jeweils demselben Merkmalsträger zuzuordnen sind!*
- Wie im eindimensionalen Fall wird der Merkmalsraum zu  $X$  mit  $A = \{a_1, \dots, a_k\}$  bezeichnet, darüberhinaus der Merkmalsraum zu  $Y$  mit  $B = \{b_1, \dots, b_l\}$ .
- Es muss nicht jede der  $k \cdot l$  Kombinationen  $(a_i, b_j)$  in der Urliste auftreten!
- Geeignetes Mittel zur Aggregation der Merkmalswerte, wenn sowohl  $k = \#A$  als auch  $l = \#B$  „klein“ sind: **Häufigkeitsverteilungen**

# Häufigkeitsverteilungen zweidimensionaler Daten III

- Zur Erstellung einer Häufigkeitsverteilung: Zählen, wie oft jede Kombination  $(a_i, b_j)$  der Merkmalsausprägung  $a_i$  von  $X$  und  $b_j$  von  $Y$ ,  $i \in \{1, \dots, k\}$ ,  $j \in \{1, \dots, l\}$ , in der Urliste  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  vorkommt.
  - ▶ Die **absoluten Häufigkeiten**  $h_{ij} := h(a_i, b_j)$  geben für die Kombination  $(a_i, b_j)$ ,  $i \in \{1, \dots, k\}$ ,  $j \in \{1, \dots, l\}$ , die (absolute) Anzahl der Einträge der Urliste mit der Ausprägung  $(a_i, b_j)$  an, in Zeichen

$$h_{ij} := h(a_i, b_j) := \#\{m \in \{1, \dots, n\} \mid (x_m, y_m) = (a_i, b_j)\} .$$

- ▶ Die **relativen Häufigkeiten**  $r_{ij} := r(a_i, b_j)$  geben für die Kombination  $(a_i, b_j)$ ,  $i \in \{1, \dots, k\}$ ,  $j \in \{1, \dots, l\}$ , den (relativen) Anteil der Einträge der Urliste mit der Ausprägung  $(a_i, b_j)$  an der gesamten Urliste an, in Zeichen

$$r_{ij} := r(a_i, b_j) := \frac{h(a_i, b_j)}{n} = \frac{\#\{m \in \{1, \dots, n\} \mid (x_m, y_m) = (a_i, b_j)\}}{n} .$$

# Häufigkeitsverteilungen zweidimensionaler Daten IV

- Natürlich gilt auch hier  $\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l h(a_i, b_j) = n$  und  $\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l r(a_i, b_j) = 1$ .
- Tabellarische Darstellung zweidimensionaler Häufigkeitsverteilungen in **Kontingenztabelle**:

$X \setminus Y$	$b_1$	$b_2$	$\dots$	$b_l$
$a_1$	$h_{11}$	$h_{12}$	$\dots$	$h_{1l}$
$a_2$	$h_{21}$	$h_{22}$	$\dots$	$h_{2l}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$a_k$	$h_{k1}$	$h_{k2}$	$\dots$	$h_{kl}$

- Statt absoluter Häufigkeiten  $h_{ij}$  hier auch relative Häufigkeiten  $r_{ij}$  üblich.

# Häufigkeitsverteilungen zweidimensionaler Daten V

- Zu den absoluten Häufigkeiten  $h_{ij}$  und relativen Häufigkeiten  $r_{ij}$  definiert man die **absoluten Randhäufigkeiten**

$$h_{i.} := \sum_{j=1}^l h_{ij} \text{ für } i \in \{1, \dots, k\} \quad \text{und} \quad h_{.j} := \sum_{i=1}^k h_{ij} \text{ für } j \in \{1, \dots, l\}$$

sowie die **relativen Randhäufigkeiten**

$$r_{i.} := \sum_{j=1}^l r_{ij} \text{ für } i \in \{1, \dots, k\} \quad \text{und} \quad r_{.j} := \sum_{i=1}^k r_{ij} \text{ für } j \in \{1, \dots, l\} .$$

- Diese Randhäufigkeiten stimmen offensichtlich (!) mit den (eindimensionalen) individuellen Häufigkeitsverteilungen der Merkmale  $X$  bzw.  $Y$  überein.



# Häufigkeitsverteilungen zweidimensionaler Daten VI

- Kontingenztafeln werden oft durch die Randhäufigkeiten, die sich dann als Zeilen- bzw. Spaltensummen ergeben, in der Form

$X \setminus Y$	$b_1$	$b_2$	$\dots$	$b_l$	$h_{i\cdot}$
$a_1$	$h_{11}$	$h_{12}$	$\dots$	$h_{1l}$	$h_{1\cdot}$
$a_2$	$h_{21}$	$h_{22}$	$\dots$	$h_{2l}$	$h_{2\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$a_k$	$h_{k1}$	$h_{k2}$	$\dots$	$h_{kl}$	$h_{k\cdot}$
$h_{\cdot j}$	$h_{\cdot 1}$	$h_{\cdot 2}$	$\dots$	$h_{\cdot l}$	$n$

oder

$X \setminus Y$	$b_1$	$b_2$	$\dots$	$b_l$	$r_{i\cdot}$
$a_1$	$r_{11}$	$r_{12}$	$\dots$	$r_{1l}$	$r_{1\cdot}$
$a_2$	$r_{21}$	$r_{22}$	$\dots$	$r_{2l}$	$r_{2\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$a_k$	$r_{k1}$	$r_{k2}$	$\dots$	$r_{kl}$	$r_{k\cdot}$
$r_{\cdot j}$	$r_{\cdot 1}$	$r_{\cdot 2}$	$\dots$	$r_{\cdot l}$	$1$

ergänzt.

- Zur besseren Abgrenzung von Randhäufigkeiten nennt man  $h_{ij}$  bzw.  $r_{ij}$  oft auch **gemeinsame absolute** bzw. **relative Häufigkeiten**.

# Beispiel (Kontingenztafel)

- Merkmal  $X$ : Mathematiknote,  
Merkmal  $Y$ : Physiknote,  
Urliste zum zweidimensionalen Merkmal  $(X, Y)$ :

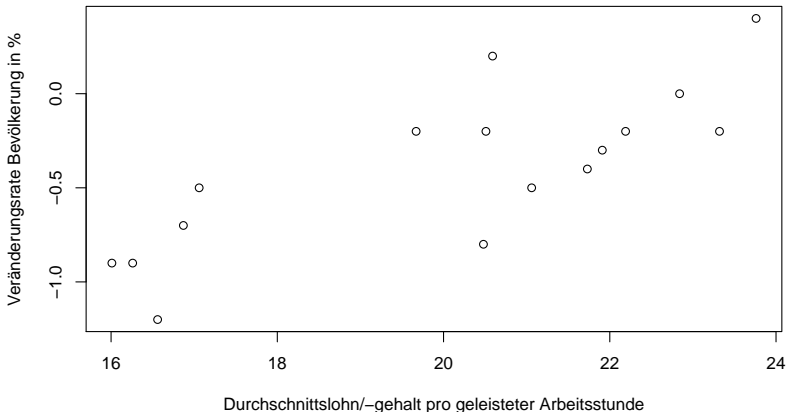
(2, 2), (2, 3), (3, 3), (5, 3), (2, 3), (5, 4), (5, 5), (4, 2), (4, 4), (1, 2),  
 (2, 3), (1, 3), (4, 4), (2, 3), (4, 4), (3, 4), (4, 2), (5, 4), (2, 3), (4, 4),  
 (5, 4), (2, 3), (4, 3), (1, 1), (2, 1), (2, 2), (1, 1), (2, 3), (5, 4), (2, 2)

- Kontingenztafel (mit Randhäufigkeiten)

$X \backslash Y$	1	2	3	4	5	$h_{i\cdot}$
1	2	1	1	0	0	4
2	1	3	7	0	0	11
3	0	0	1	1	0	2
4	0	2	1	4	0	7
5	0	0	1	4	1	6
$h_{\cdot j}$	3	6	11	9	1	30

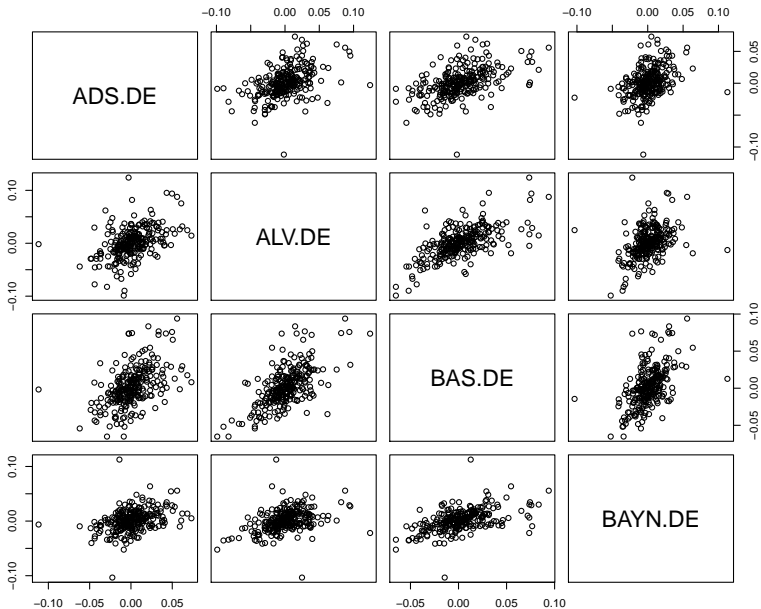
- Zur Visualisierung zweidimensionaler Daten mit (überwiegend) paarweise verschiedenen Ausprägungen (z.B. bei zwei stetigen Merkmalen):  
**Streudiagramm** bzw. **Scatter-Plot**

**Durchschnittslohn vs. Bevölkerungswachstum nach Bundesländern 2009**



- Bei mehr als zwei Merkmalen: Paarweise Streudiagramme üblich.

## Tagesrenditen (2008) verschiedener DAX-Papiere



# Klassierung mehrdimensionaler Daten

- Analog zu eindimensionalen Daten:  
Häufigkeitstabellen schlecht geeignet für Merkmale mit „vielen“ verschiedenen Ausprägungen, also insbesondere stetige Merkmale.
- Genauso wie bei eindimensionalen Daten möglich: **Klassierung**
- Klassierung für mehrdimensionale Daten wird hier nicht mehr im Detail ausgeführt
- Allgemeine „Anleitungen“ für Klassierungen mehrdimensionaler Daten:
  - ▶ Oft werden nicht alle Merkmale klassiert, sondern nur einzelne.
  - ▶ Klassierung erfolgt individuell für jedes zu klassierende Merkmal.
  - ▶ Anwendung von Verfahren für nominalskalierte und ordinalskalierte Merkmale klar.
  - ▶ Bei Verfahren für kardinalskalierte Daten: Annahme gleichmäßiger Verteilung der Merkmalswerte auf Klassen, ggf. Klassenmitte als Näherung für die Merkmalsausprägungen (wie bisher!)

# Bedingte Häufigkeitsverteilungen I

- Ziel einer gemeinsamen Betrachtung von mehreren Merkmalen:  
*Untersuchung von Abhängigkeiten (Interdependenzen)*
- **Zentrale Frage:** Hängt der Merkmalswert eines Merkmals  $X$  von der angenommenen Ausprägung eines anderen Merkmals  $Y$  ab (und umgekehrt)?
- Untersuchungsmöglichkeit auf Grundlage gemeinsamer Häufigkeiten zu den Merkmalen  $X$  mit Merkmalsraum  $A = \{a_1, \dots, a_k\}$  und  $Y$  mit Merkmalsraum  $B = \{b_1, \dots, b_l\}$ : Bilden der **bedingten relativen Häufigkeiten**

$$\blacktriangleright r(a_i|Y = b_j) := \frac{h_{ij}}{h_{.j}}$$

$$\blacktriangleright r(b_j|X = a_i) := \frac{h_{ij}}{h_{i.}}$$

für  $i \in \{1, \dots, k\}$  und  $j \in \{1, \dots, l\}$ .

# Bedingte Häufigkeitsverteilungen II

- Für festes  $j \in \{1, \dots, l\}$  entsprechen die bedingten relativen Häufigkeiten  $r(a_i|Y = b_j)$  also den relativen Häufigkeiten von Merkmal  $X$  bei *Einschränkung der statistischen Masse auf die Merkmalsträger, für die das Merkmal  $Y$  die Ausprägung  $b_j$  annimmt.*
- Umgekehrt entsprechen für festes  $i \in \{1, \dots, k\}$  die bedingten relativen Häufigkeiten  $r(b_j|X = a_i)$  den relativen Häufigkeiten von Merkmal  $Y$  bei *Einschränkung der statistischen Masse auf die Merkmalsträger, für die das Merkmal  $X$  die Ausprägung  $a_i$  annimmt.*
- Man nennt die Merkmale  $X$  und  $Y$  *unabhängig*, wenn diese Einschränkungen keinen Effekt auf die relativen Häufigkeiten haben, d.h. alle bedingten relativen Häufigkeiten mit den zugehörigen relativen Randhäufigkeiten übereinstimmen.

## Beispiel (bedingte Häufigkeitsverteilungen)

- Von Folie 106: Merkmal  $X$ : Mathematiknote, Merkmal  $Y$ : Physiknote, Kontingenztabelle

$X \backslash Y$	1	2	3	4	5	$h_{i.}$
1	2	1	1	0	0	4
2	1	3	7	0	0	11
3	0	0	1	1	0	2
4	0	2	1	4	0	7
5	0	0	1	4	1	6
$h_{.j}$	3	6	11	9	1	30

- Tabelle mit bedingten Häufigkeitsverteilungen für  $Y|X = a_i$ :

$b_j$	1	2	3	4	5	$\Sigma$
$r(b_j X = 1)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0	1
$r(b_j X = 2)$	$\frac{1}{11}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{7}{11}$	0	0	1
$r(b_j X = 3)$	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1
$r(b_j X = 4)$	0	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	0	1
$r(b_j X = 5)$	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	1



# Unabhängigkeit von zwei Merkmalen I

## Definition 4.1 (Unabhängigkeit von zwei Merkmalen)

Die Merkmale  $X$  mit Merkmalsraum  $A = \{a_1, \dots, a_k\}$  und  $Y$  mit Merkmalsraum  $B = \{b_1, \dots, b_l\}$  eines zweidimensionalen Merkmals  $(X, Y)$  zu einer Urliste der Länge  $n$  heißen **unabhängig**, falls

$$r(a_i|Y = b_j) = \frac{h_{ij}}{h_{.j}} \stackrel{!}{=} \frac{h_{i.}}{n} = r(a_i)$$

bzw. (gleichbedeutend)

$$r(b_j|X = a_i) = \frac{h_{ij}}{h_{i.}} \stackrel{!}{=} \frac{h_{.j}}{n} = r(b_j)$$

für alle  $i \in \{1, \dots, k\}$  und  $j \in \{1, \dots, l\}$  gilt.

# Unabhängigkeit von zwei Merkmalen II

- Die Bedingungen in Definition 4.1 sind offensichtlich genau dann erfüllt, wenn  $h_{ij} = \frac{h_{i\cdot} \cdot h_{\cdot j}}{n}$  bzw.  $r_{ij} = r_{i\cdot} \cdot r_{\cdot j}$  für alle  $i \in \{1, \dots, k\}$  und  $j \in \{1, \dots, l\}$  gilt, die gemeinsamen relativen Häufigkeiten sich also als Produkt der relativen Randhäufigkeiten ergeben.
- Unabhängigkeit im Sinne von Definition 4.1 ist eher ein idealtypisches Konzept und in der Praxis kaum erfüllt.
- Interessant sind daher Maße, die vorhandene Abhängigkeiten zwischen zwei Merkmalen näher quantifizieren.

# Abhängigkeitsmaße

- Je nach Skalierungsniveau der Merkmale  $X$  und  $Y$  können verschiedene Verfahren zur Messung der Abhängigkeit verwendet werden, das niedrigste Skalierungsniveau (nominal  $\prec$  ordinal  $\prec$  kardinal) ist dabei für die Einschränkung der geeigneten Verfahren maßgeblich:
  - ▶ Verfahren für ordinalskalierte Merkmale können nur dann eingesetzt werden, wenn beide Merkmale  $X$  und  $Y$  mindestens ordinalskaliert sind.
  - ▶ Verfahren für kardinalskalierte Merkmale können nur dann eingesetzt werden, wenn beide Merkmale  $X$  und  $Y$  kardinalskaliert sind.
- Trotz unterschiedlicher Wertebereiche der Abhängigkeitsmaße besteht die Gemeinsamkeit, dass die Abhängigkeit von  $X$  und  $Y$  stets mit dem Wert 0 gemessen wird, falls  $X$  und  $Y$  unabhängig gemäß Definition 4.1 sind.
- *Vorsicht beim Ableiten von Kausalitätsbeziehungen (Wirkungsrichtungen) aus entdeckten Abhängigkeiten!*

# Kardinalskalierte Merkmale

## Definition 4.2 (emp. Kovarianz, Pearsonscher Korrelationskoeffizient)

Gegeben sei das zweidimensionale Merkmal  $(X, Y)$  mit der Urliste  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  der Länge  $n$ ,  $X$  und  $Y$  seien kardinalskaliert. Mit  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$  bzw.  $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$  seien wie üblich die arithmetischen Mittelwerte von  $X$  bzw.  $Y$  bezeichnet, mit

$$s_X = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad \text{bzw.} \quad s_Y = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$$

die jeweiligen empirischen Standardabweichungen. Dann heißen

- $s_{X,Y} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$

die **empirische Kovarianz** von  $X$  und  $Y$  und

- $r_{X,Y} := \frac{s_{X,Y}}{s_X \cdot s_Y} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$

der **(Bravais-)Pearsonsche Korrelationskoeffizient** von  $X$  und  $Y$ .

# Bemerkungen I

- $s_{X,Y}$  kann meist einfacher gemäß  $s_{X,Y} = \overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}$  mit

$$\overline{xy} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i$$

berechnet werden.

- Bei Vorliegen der Häufigkeitsverteilung kann  $\overline{xy}$  einfacher gemäß

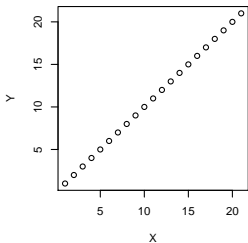
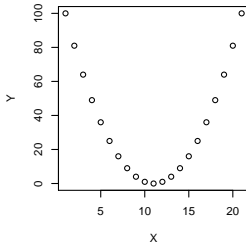
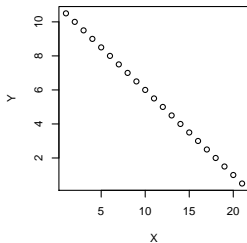
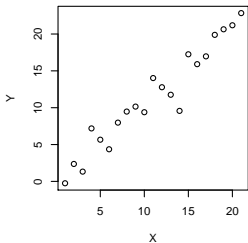
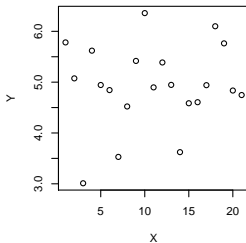
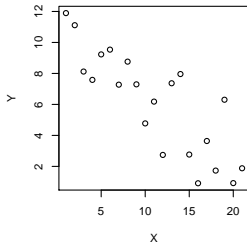
$$\overline{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l a_i b_j \cdot h_{ij} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l a_i b_j \cdot r_{ij}$$

berechnet werden ( $\bar{x}$  und  $\bar{y}$  werden zur Berechnung von  $s_{X,Y}$  dann zweckmäßigerweise ebenfalls mit Hilfe der Häufigkeitsverteilungen berechnet, siehe dazu Folie 67).

# Bemerkungen II

- Es gilt **stets**  $-1 \leq r_{X,Y} \leq 1$ .
- $r_{X,Y}$  misst **lineare** Zusammenhänge, spezieller gilt
  - ▶  $r_{X,Y} > 0$  bei positiver „Steigung“ („X und Y sind **positiv korreliert**“),
  - ▶  $r_{X,Y} < 0$  bei negativer „Steigung“ („X und Y sind **negativ korreliert**“),
  - ▶  $|r_{X,Y}| = 1$ , falls alle  $(x_i, y_i)$  auf einer Geraden (mit Steigung  $\neq 0$ ) liegen.
- $r_{X,Y}$  ist nur definiert, wenn X und Y jeweils mindestens zwei verschiedene Merkmalsausprägungen besitzen.

# Beispiel: Pearsonscher Korrelationskoeffizient

 $r_{X,Y} = 1$  $r_{X,Y} = 0$  $r_{X,Y} = -1$  $r_{X,Y} = 0.9652$  $r_{X,Y} = 0.1103$  $r_{X,Y} = -0.837$ 

# (Mindestens) ordinalskalierte Merkmale I

- Messen *linearer* Zusammenhänge bei Ordinalskala nicht (mehr) möglich, stattdessen: Messen *monotoner* Zusammenhänge.
- Hierzu für  $X$  und  $Y$  erforderlich: Bilden der **Ränge** der Merkmalswerte (gemäß der vorgegebenen Ordnung).
- Aus den Merkmalen  $X$  und  $Y$  mit Merkmalswerten  $x_1, \dots, x_n$  bzw.  $y_1, \dots, y_n$  werden dabei neue Merkmale  $rg(X)$  und  $rg(Y)$  mit Merkmalswerten  $rg(X)_1, \dots, rg(X)_n$  bzw.  $rg(Y)_1, \dots, rg(Y)_n$ .
- Bilden der Ränge wird exemplarisch für Merkmal  $X$  beschrieben (Bilden der Ränge für  $Y$  ganz analog).



## (Mindestens) ordinalskalierte Merkmale II

- 1 Einfacher Fall: *Alle  $n$  Merkmalswerte sind verschieden.*  
 $\rightsquigarrow$  Ränge von 1 bis  $n$  werden den Merkmalswerten nach der Position in der gemäß der vorgegebenen Ordnung sortierten Urliste zugewiesen:

$$x_{(1)} \mapsto 1, \dots, x_{(n)} \mapsto n$$

- 2 Komplizierter Fall: Es existieren mehrfach auftretende Merkmalswerte (sog. *Bindungen*), d.h. es gilt  $x_i = x_j$  für (mindestens) ein Paar  $(i, j)$  mit  $i \neq j$ .  
 $\rightsquigarrow$  Prinzipielle Vorgehensweise wie im einfachen Fall, Ränge übereinstimmender Merkmalswerte müssen aber (arithmetisch) gemittelt werden.

## (Mindestens) ordinalskalierte Merkmale III

- „Berechnungsvorschrift“ für beide Fälle in folgender Definition:

### Definition 4.3 (Rang eines Merkmals $X$ , $\text{rg}(X)_i$ )

Gegeben sei ein Merkmal  $X$  mit Urliste  $x_1, \dots, x_n$ . Dann heißt für  $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\begin{aligned} \text{rg}(X)_i &:= \#\{j \in \{1, \dots, n\} \mid x_j \leq x_i\} - \frac{\#\{j \in \{1, \dots, n\} \mid x_j = x_i\} - 1}{2} \\ &= \sum_{\substack{a_j \leq x_i \\ 1 \leq j \leq n}} h(a_j) - \frac{h(x_i) - 1}{2} \\ &= n \cdot F(x_i) - \frac{h(x_i) - 1}{2} \end{aligned}$$

der **Rang** von  $x_i$ . Die Werte  $\text{rg}(X)_1, \dots, \text{rg}(X)_n$  können als Urliste zu einem neuen Merkmal  $\text{rg}(X)$  aufgefasst werden.

## (Mindestens) ordinalskalierte Merkmale IV

- Der zweite (subtrahierte) Term  $\frac{\#\{j \in \{1, \dots, n\} \mid x_j = x_i\} - 1}{2}$  bzw.  $\frac{h(x_i) - 1}{2}$  in Definition 4.3 dient der Berechnung des arithmetischen Mittels bei Vorliegen von Bindungen.
- Liegen keine Bindungen vor (sind also alle Merkmalswerte verschieden), ist der zweite (subtrahierte) Term in Definition 4.3 immer gleich 0.
- Idee zur Konstruktion eines Abhängigkeitsmaßes für (mindestens) ordinalskalierte zweidimensionale Merkmale  $(X, Y)$ :
  - 1 Übergang von  $X$  zu  $\text{rg}(X)$  sowie von  $Y$  zu  $\text{rg}(Y)$
  - 2 Berechnung des Pearsonschen Korrelationskoeffizienten von  $\text{rg}(X)$  und  $\text{rg}(Y)$

# Spearman'scher Rangkorrelationskoeffizient I

## Definition 4.4 (Spearman'scher Rangkorrelationskoeffizient)

Gegeben sei das zweidimensionale Merkmal  $(X, Y)$  mit der Urliste  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  der Länge  $n$ ,  $X$  und  $Y$  seien (mindestens) ordinalskaliert. Zu  $X$  und  $Y$  seien die Ränge  $\text{rg}(X)$  und  $\text{rg}(Y)$  gemäß Definition 4.3 gegeben. Dann heißt

$$r_{X,Y}^{(S)} := r_{\text{rg}(X), \text{rg}(Y)} = \frac{s_{\text{rg}(X), \text{rg}(Y)}}{s_{\text{rg}(X)} \cdot s_{\text{rg}(Y)}}$$

der **Spearman'sche Rangkorrelationskoeffizient** von  $X$  und  $Y$ .

- Wegen des Zusammenhangs mit dem Pearsonschen Korrelationskoeffizienten gilt offensichtlich stets

$$-1 \leq r_{X,Y}^{(S)} \leq 1 .$$

# Spearman'scher Rangkorrelationskoeffizient II

- Bei der Berechnung von  $r_{X,Y}^{(S)}$  kann die Eigenschaft

$$\overline{\text{rg}(X)} = \overline{\text{rg}(Y)} = \frac{n+1}{2}$$

ausgenutzt werden.

- Damit gilt für  $r_{X,Y}^{(S)}$  stets:

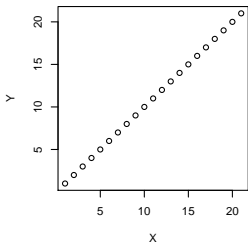
$$r_{X,Y}^{(S)} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{rg}(X)_i \cdot \text{rg}(Y)_i - \frac{(n+1)^2}{4}}{\sqrt{\left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\text{rg}(X)_i)^2 - \frac{(n+1)^2}{4} \right] \cdot \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\text{rg}(Y)_i)^2 - \frac{(n+1)^2}{4} \right]}}$$

- Nur** wenn  $x_i \neq x_j$  und  $y_i \neq y_j$  für alle  $i \neq j$  gilt (also **keine** Bindungen vorliegen), gilt die wesentlich leichter zu berechnende „Formel“

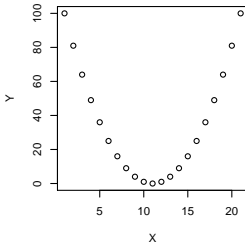
$$r_{X,Y}^{(S)} = 1 - \frac{6 \cdot \sum_{i=1}^n (\text{rg}(X)_i - \text{rg}(Y)_i)^2}{n \cdot (n^2 - 1)}.$$

# Beispiel: Spearmanscher Rangkorrelationskoeffizient

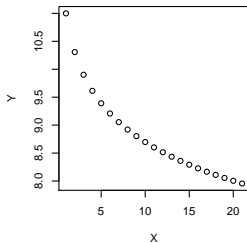
$$r_{X,Y} = 1, r_{X,Y}^{(S)} = 1$$



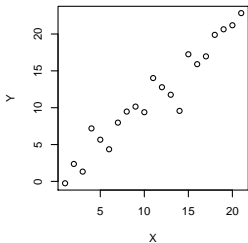
$$r_{X,Y} = 0, r_{X,Y}^{(S)} = 0$$



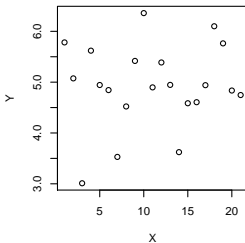
$$r_{X,Y} = -0.93, r_{X,Y}^{(S)} = -1$$



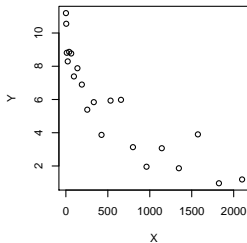
$$r_{X,Y} = 0.9652, r_{X,Y}^{(S)} = 0.9662$$



$$r_{X,Y} = 0.1103, r_{X,Y}^{(S)} = -0.0532$$



$$r_{X,Y} = -0.875, r_{X,Y}^{(S)} = -0.9455$$



# (Mindestens) nominalskalierte Merkmale I

- Da bei nominalskalierten Merkmalen keine Ordnung vorgegeben ist, kann hier lediglich die *Stärke*, nicht aber die *Richtung* der Abhängigkeit zwischen  $X$  und  $Y$  gemessen werden.
- Idee zur Konstruktion eines Abhängigkeitsmaßes auf Basis der gemeinsamen Häufigkeitstabelle zu  $(X, Y)$ :
  - ▶ Bei Unabhängigkeit der Merkmale  $X$  und  $Y$  müsste nach Definition 4.1 auf Folie 113

$$h_{ij} = \frac{h_{i.} \cdot h_{.j}}{n} \quad \text{für alle } i \in \{1, \dots, k\}, j \in \{1, \dots, l\}$$

gelten.

- ▶ Abweichungen zwischen  $h_{ij}$  und  $\frac{h_{i.} \cdot h_{.j}}{n}$  können also zur Messung der Abhängigkeit eingesetzt werden.
- Hier verwendetes Abhängigkeitsmaß entsteht aus geeigneter Zusammenfassung und Normierung dieser Abweichungen.

## (Mindestens) nominalskalierte Merkmale II

### Definition 4.5 (Pearsonscher Kontingenzkoeffizient)

Gegeben sei das zweidimensionale Merkmal  $(X, Y)$  zu einer Urliste der Länge  $n$  mit den zugehörigen absoluten gemeinsamen Häufigkeiten  $h_{ij}$  sowie den Randhäufigkeiten  $h_{i\cdot}$  und  $h_{\cdot j}$  für  $i \in \{1, \dots, k\}$ ,  $j \in \{1, \dots, l\}$ .

Dann heißt

$$C_{X,Y}^{\text{korr}} := \sqrt{\frac{\min\{k, l\}}{\min\{k, l\} - 1} \cdot \frac{\chi^2}{n + \chi^2}}$$

mit

$$\chi^2 := \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \frac{\left(h_{ij} - \frac{h_{i\cdot} \cdot h_{\cdot j}}{n}\right)^2}{\frac{h_{i\cdot} \cdot h_{\cdot j}}{n}}$$

**korrigierter Pearsonscher Kontingenzkoeffizient** der Merkmale  $X$  und  $Y$ .

- Es gilt stets  $0 \leq C_{X,Y}^{\text{korr}} \leq 1$ .