Inhaltsverzeichnis

(Ausschnitt)

Auswertungsmethoden für mehrdimensionale Daten I

- Werden zu einer statistischen Masse mehrere Merkmale erhoben, so können diese natürlich individuell mit den Methoden für einzelne Merkmale ausgewertet werden.
- Eine Menge von Kennzahlen in den Spalten kann zum Beispiel gegen eine Menge von Merkmalen in den Zeilen tabelliert werden:

BMW.DE	$x_{(1)}$	$x_{0.5}$	$x_{(n)}$	$\overline{x}$	s	IQA	Schiefe	Kurt.
Preise	17.610	28.040	35.940	27.967	4.974	8.015	−0.383	1.932
log-Preise	2.868	3.334	3.582	3.314	0.189	0.286	−0.618	2.258
Renditen	−0.078	−0.001	0.148	0.002	0.030	0.034	0.672	5.941
log-Renditen	−0.081	−0.001	0.138	0.001	0.029	0.034	0.484	5.396

- Liegen die Merkmalswerte jeweils in ähnlichen Wertebereichen, ist auch ein Box-Plot verschiedener Merkmale nützlich.

Auswertungsmethoden für mehrdimensionale Daten II

- Isolierte Betrachtung der einzelnen Merkmale kann allerdings Abhängigkeiten zwischen mehreren Merkmalen nicht erkennbar machen!
- Zur Untersuchung von Abhängigkeiten mehrerer Merkmale „simultane“ Betrachtung der Merkmale erforderlich.
- Gemeinsame Betrachtung von mehr als 2 Merkmalen allerdings technisch schwierig.

$\leadsto$ Spezielle Methoden für **zweidimensionale** Daten (2 Merkmale simultan)

Häufigkeitsverteilungen zweidimensionaler Daten I

- Im Folgenden wird angenommen, dass den Merkmalsträgern zu **zwei** Merkmalen X und Y Merkmalswerte zugeordnet werden, also ein **zweidimensionales Merkmal** (X, Y) vorliegt.
- Analog zum eindimensionalen Fall geht man davon aus, auch vor der Erhebung schon Mengen M_1 bzw. M_2 angeben zu können, die alle vorstellbaren Merkmalswerte des Merkmals X bzw. Y enthalten.
- Die Urliste der Länge n (zur statistischen Masse der Mächtigkeit n) besteht nun aus den n Paaren

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$$

mit $x_m \in M_1$ und $y_m \in M_2$ bzw. $(x_m, y_m) \in M_1 \times M_2$ für $m \in \{1, \ldots, n\}$.

Häufigkeitsverteilungen zweidimensionaler Daten II

- *Unverzichtbare Eigenschaft der Urliste ist, dass die Paare von Merkmalswerten jeweils demselben Merkmalsträger zuzuordnen sind!*
- Wie im eindimensionalen Fall wird der Merkmalsraum zu X mit $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ bezeichnet, darüberhinaus der Merkmalsraum zu Y mit $B = \{b_1, \ldots, b_l\}$.
- Es muss nicht jede der $k \cdot l$ Kombinationen (a_i, b_j) in der Urliste auftreten!
- Geeignetes Mittel zur Aggregation der Merkmalswerte, wenn sowohl $k = \#A$ als auch $l = \#B$ „klein" sind: **Häufigkeitsverteilungen**

Häufigkeitsverteilungen zweidimensionaler Daten III

- Zur Erstellung einer Häufigkeitsverteilung: Zählen, wie oft jede Kombination (a_i, b_j) der Merkmalsausprägung a_i von X und b_j von Y, $i \in \{1, \ldots, k\}$, $j \in \{1, \ldots, l\}$, in der Urliste $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ vorkommt.
  - Die **absoluten Häufigkeiten** $h_{ij} := h(a_i, b_j)$ geben für die Kombination (a_i, b_j), $i \in \{1, \ldots, k\}$, $j \in \{1, \ldots, l\}$, die (absolute) Anzahl der Einträge der Urliste mit der Ausprägung (a_i, b_j) an, in Zeichen

$$h_{ij} := h(a_i, b_j) := \#\{m \in \{1, \ldots, n\} \mid (x_m, y_m) = (a_i, b_j)\} \ .$$

  - Die **relativen Häufigkeiten** $r_{ij} := r(a_i, b_j)$ geben für die Kombination (a_i, b_j), $i \in \{1, \ldots, k\}$, $j \in \{1, \ldots, l\}$, den (relativen) Anteil der Einträge der Urliste mit der Ausprägung (a_i, b_j) an der gesamten Urliste an, in Zeichen

$$r_{ij} := r(a_i, b_j) := \frac{h(a_i, b_j)}{n} = \frac{\#\{m \in \{1, \ldots, n\} \mid (x_m, y_m) = (a_i, b_j)\}}{n} \ .$$

Häufigkeitsverteilungen zweidimensionaler Daten IV

- Natürlich gilt auch hier $\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} h(a_i, b_j) = n$ und $\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} r(a_i, b_j) = 1$.
- Tabellarische Darstellung zweidimensionaler Häufigkeitsverteilungen in **Kontingenztabellen**:

$X \setminus Y$	b_1	b_2	$\cdots$	b_l
a_1	h_{11}	h_{12}	$\cdots$	h_{1l}
a_2	h_{21}	h_{22}	$\cdots$	h_{2l}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
a_k	h_{k1}	h_{k2}	$\cdots$	h_{kl}

- Statt absoluter Häufigkeiten h_{ij} hier auch relative Häufigkeiten r_{ij} üblich.

Häufigkeitsverteilungen zweidimensionaler Daten V

- Zu den absoluten Häufigkeiten h_{ij} und relativen Häufigkeiten r_{ij} definiert man die **absoluten Randhäufigkeiten**

$$h_{i\cdot} := \sum_{j=1}^{l} h_{ij} \text{ für } i \in \{1, \ldots, k\} \qquad \text{und} \qquad h_{\cdot j} := \sum_{i=1}^{k} h_{ij} \text{ für } j \in \{1, \ldots, l\}$$

sowie die **relativen Randhäufigkeiten**

$$r_{i\cdot} := \sum_{j=1}^{l} r_{ij} \text{ für } i \in \{1, \ldots, k\} \qquad \text{und} \qquad r_{\cdot j} := \sum_{i=1}^{k} r_{ij} \text{ für } j \in \{1, \ldots, l\} .$$

- Diese Randhäufigkeiten stimmen offensichtlich (!) mit den (eindimensionalen) individuellen Häufigkeitsverteilungen der Merkmale X bzw. Y überein.

Häufigkeitsverteilungen zweidimensionaler Daten VI

- Kontingenztabellen werden oft durch die Randhäufigkeiten, die sich dann als Zeilen- bzw. Spaltensummen ergeben, in der Form

$X \setminus Y$	b_1	b_2	$\cdots$	b_l	$h_{i\cdot}$
a_1	h_{11}	h_{12}	$\cdots$	h_{1l}	$h_{1\cdot}$
a_2	h_{21}	h_{22}	$\cdots$	h_{2l}	$h_{2\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
a_k	h_{k1}	h_{k2}	$\cdots$	h_{kl}	$h_{k\cdot}$
$h_{\cdot j}$	$h_{\cdot 1}$	$h_{\cdot 2}$	$\cdots$	$h_{\cdot l}$	n

oder

$X \setminus Y$	b_1	b_2	$\cdots$	b_l	$r_{i\cdot}$
a_1	r_{11}	r_{12}	$\cdots$	r_{1l}	$r_{1\cdot}$
a_2	r_{21}	r_{22}	$\cdots$	r_{2l}	$r_{2\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
a_k	r_{k1}	r_{k2}	$\cdots$	r_{kl}	$r_{k\cdot}$
$r_{\cdot j}$	$r_{\cdot 1}$	$r_{\cdot 2}$	$\cdots$	$r_{\cdot l}$	1

ergänzt.

- Zur besseren Abgrenzung von Randhäufigkeiten nennt man h_{ij} bzw. r_{ij} oft auch **gemeinsame absolute** bzw. **relative Häufigkeiten**.

Beispiel (Kontingenztabelle)

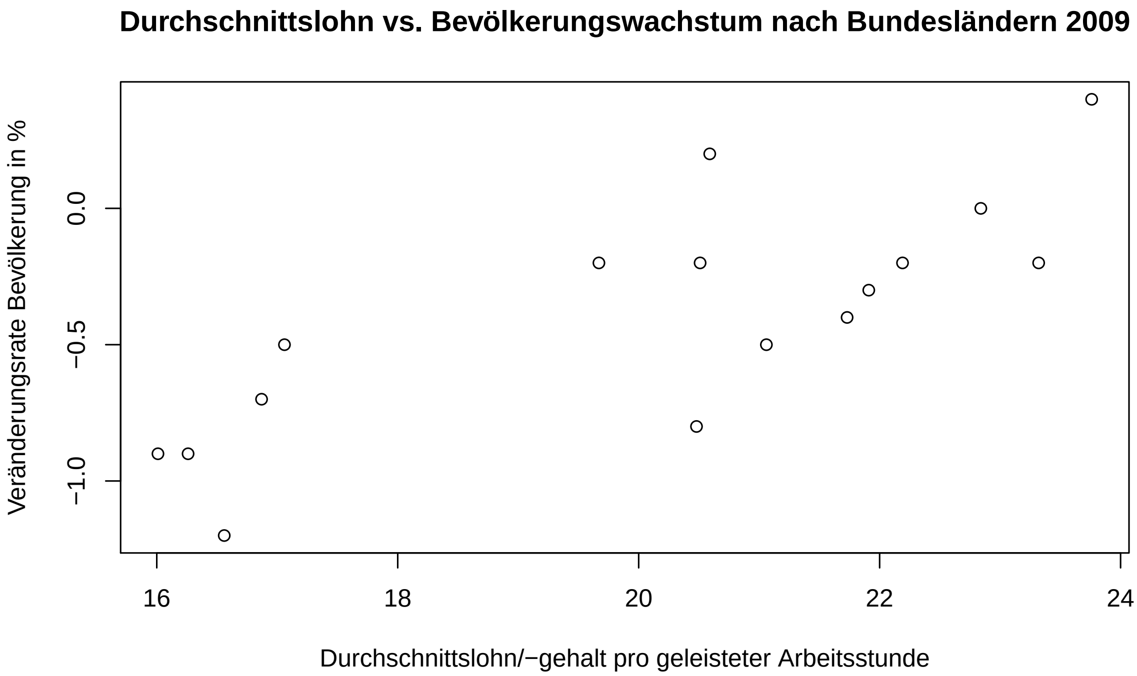
- Merkmal X: Mathematiknote,
  Merkmal Y: Physiknote,
  Urliste zum zweidimensionalen Merkmal (X, Y):

$$(2,2),\ (2,3),\ (3,3),\ (5,3),\ (2,3),\ (5,4),\ (5,5),\ (4,2),\ (4,4),\ (1,2),$$
$$(2,3),\ (1,3),\ (4,4),\ (2,3),\ (4,4),\ (3,4),\ (4,2),\ (5,4),\ (2,3),\ (4,4),$$
$$(5,4),\ (2,3),\ (4,3),\ (1,1),\ (2,1),\ (2,2),\ (1,1),\ (2,3),\ (5,4),\ (2,2)$$

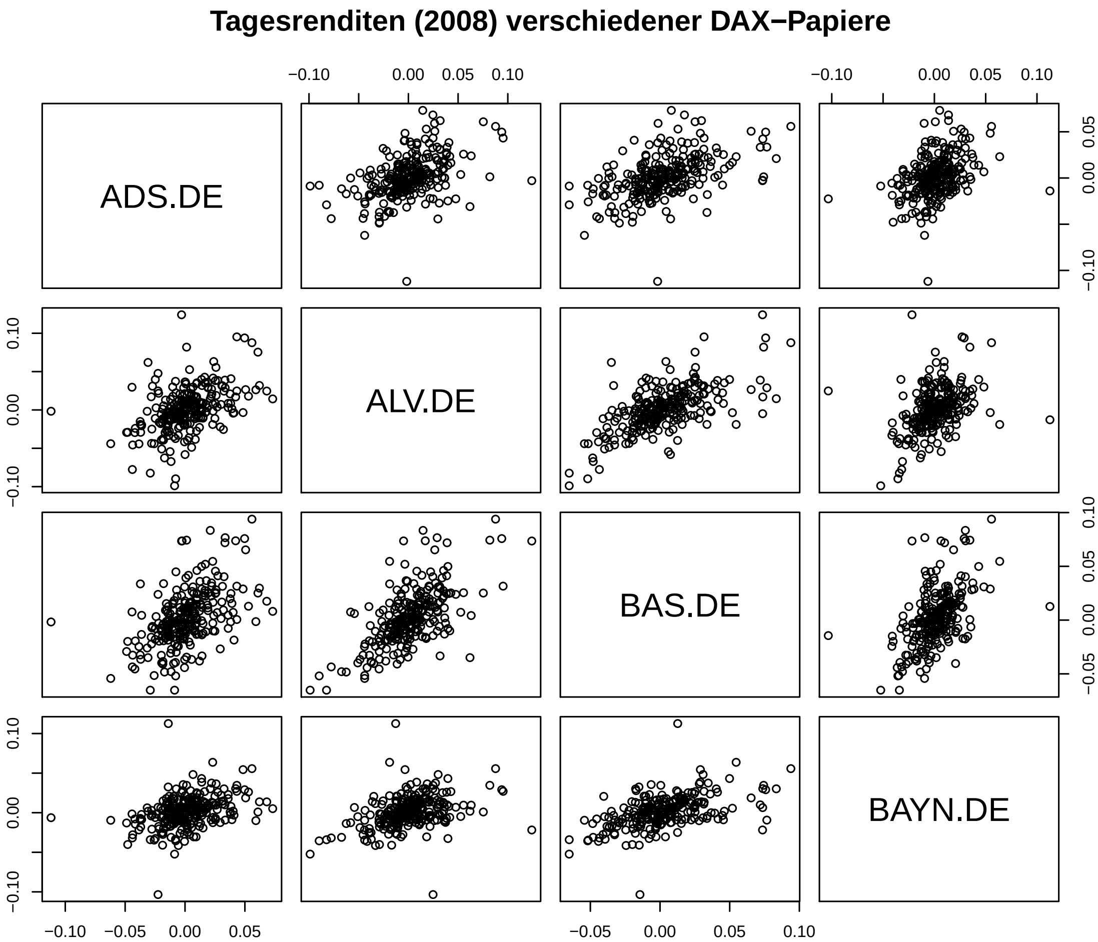
- Kontingenztabelle (mit Randhäufigkeiten)

$X \setminus Y$	1	2	3	4	5	$h_{i\cdot}$
1	2	1	1	0	0	4
2	1	3	7	0	0	11
3	0	0	1	1	0	2
4	0	2	1	4	0	7
5	0	0	1	4	1	6
$h_{\cdot j}$	3	6	11	9	1	30

- Zur Visualisierung zweidimensionaler Daten mit (überwiegend) paarweise verschiedenen Ausprägungen (z.B. bei zwei stetigen Merkmalen): **Streudiagramm** bzw. **Scatter-Plot**



- Bei mehr als zwei Merkmalen: Paarweise Streudiagramme üblich.



Klassierung mehrdimensionaler Daten

- Analog zu eindimensionalen Daten:
  Häufigkeitstabellen schlecht geeignet für Merkmale mit „vielen“ verschiedenen Ausprägungen, also insbesondere stetige Merkmale.
- Genauso wie bei eindimensionalen Daten möglich: **Klassierung**
- Klassierung für mehrdimensionale Daten wird hier nicht mehr im Detail ausgeführt
- Allgemeine „Anleitungen“ für Klassierungen mehrdimensionaler Daten:
  - Oft werden nicht alle Merkmale klassiert, sondern nur einzelne.
  - Klassierung erfolgt individuell für jedes zu klassierende Merkmal.
  - Anwendung von Verfahren für nominalskalierte und ordinalskalierte Merkmale klar.
  - Bei Verfahren für kardinalskalierte Daten: Annahme gleichmäßiger Verteilung der Merkmalswerte auf Klassen, ggf. Klassenmitte als Näherung für die Merkmalsausprägungen (wie bisher!)

Bedingte Häufigkeitsverteilungen I

- Ziel einer gemeinsamen Betrachtung von mehreren Merkmalen:
  Untersuchung von Abhängigkeiten (Interdependenzen)
- **Zentrale Frage:** Hängt der Merkmalswert eines Merkmals X von der angenommenen Ausprägung eines anderen Merkmals Y ab (und umgekehrt)?
- Untersuchungsmöglichkeit auf Grundlage gemeinsamer Häufigkeiten zu den Merkmalen X mit Merkmalsraum $A = \{a_1, \dots, a_k\}$ und Y mit Merkmalsraum $B = \{b_1, \dots, b_l\}$: Bilden der **bedingten relativen Häufigkeiten**
  - $r(a_i|Y = b_j) := \frac{h_{ij}}{h_{\cdot j}}$
  - $r(b_j|X = a_i) := \frac{h_{ij}}{h_{i\cdot}}$

  für $i \in \{1, \dots, k\}$ und $j \in \{1, \dots, l\}$.

Bedingte Häufigkeitsverteilungen II

- Für festes $j \in \{1, \ldots, l\}$ entsprechen die bedingten relativen Häufigkeiten $r(a_i|Y = b_j)$ also den relativen Häufigkeiten von Merkmal X *bei Einschränkung der statistischen Masse auf die Merkmalsträger, für die das Merkmal Y die Ausprägung b_j annimmt.*
- Umgekehrt enstprechen für festes $i \in \{1, \ldots, k\}$ die bedingten relativen Häufigkeiten $r(b_j|X = a_i)$ den relativen Häufigkeiten von Merkmal Y *bei Einschränkung der statistischen Masse auf die Merkmalsträger, für die das Merkmal X die Ausprägung a_i annimmt.*
- Man nennt die Merkmale X und Y *unabhängig*, wenn diese Einschränkungen keinen Effekt auf die relativen Häufigkeiten haben, d.h. alle bedingten relativen Häufigkeiten mit den zugehörigen relativen Randhäufigkeiten übereinstimmen.

Beispiel (bedingte Häufigkeitsverteilungen)

- Von Folie 106: Merkmal X: Mathematiknote, Merkmal Y: Physiknote, Kontingenztabelle

$X \backslash Y$	1	2	3	4	5	$h_{i\cdot}$
1	2	1	1	0	0	4
2	1	3	7	0	0	11
3	0	0	1	1	0	2
4	0	2	1	4	0	7
5	0	0	1	4	1	6
$h_{\cdot j}$	3	6	11	9	1	30

- Tabelle mit bedingten Häufigkeitsverteilungen für $Y|X = a_i$:

b_j	1	2	3	4	5	Σ
$r(b_j\|X = 1)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0	1
$r(b_j\|X = 2)$	$\frac{1}{11}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{7}{11}$	0	0	1
$r(b_j\|X = 3)$	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1
$r(b_j\|X = 4)$	0	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	0	1
$r(b_j\|X = 5)$	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

Unabhängigkeit von zwei Merkmalen I

Definition 4.1 (Unabhängigkeit von zwei Merkmalen)

Die Merkmale X mit Merkmalsraum $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ und Y mit Merkmalsraum $B = \{b_1, \ldots, b_l\}$ eines zweidimensionalen Merkmals (X, Y) zu einer Urliste der Länge n heißen **unabhängig**, falls

$$r(a_i|Y = b_j) = \frac{h_{ij}}{h_{\cdot j}} \stackrel{!}{=} \frac{h_{i\cdot}}{n} = r(a_i)$$

bzw. (gleichbedeutend)

$$r(b_j|X = a_i) = \frac{h_{ij}}{h_{i\cdot}} \stackrel{!}{=} \frac{h_{\cdot j}}{n} = r(b_j)$$

für alle $i \in \{1, \ldots, k\}$ und $j \in \{1, \ldots, l\}$ gilt.

Unabhängigkeit von zwei Merkmalen II

- Die Bedingungen in Definition 4.1 sind offensichtlich genau dann erfüllt, wenn $h_{ij} = \frac{h_{i\cdot} \cdot h_{\cdot j}}{n}$ bzw. $r_{ij} = r_{i\cdot} \cdot r_{\cdot j}$ für alle $i \in \{1, \ldots, k\}$ und $j \in \{1, \ldots, l\}$ gilt, die gemeinsamen relativen Häufigkeiten sich also als Produkt der relativen Randhäufigkeiten ergeben.
- Unabhängigkeit im Sinne von Definition 4.1 ist eher ein idealtypisches Konzept und in der Praxis kaum erfüllt.
- Interessant sind daher Maße, die vorhandene Abhängigkeiten zwischen zwei Merkmalen näher quantifizieren.

Abhängigkeitsmaße

- Je nach Skalierungsniveau der Merkmale X und Y können verschiedene Verfahren zur Messung der Abhängigkeit verwendet werden, das niedrigste Skalierungsniveau (nominal $\prec$ ordinal $\prec$ kardinal) ist dabei für die Einschränkung der geeigneten Verfahren maßgeblich:
  - Verfahren für ordinalskalierte Merkmale können nur dann eingesetzt werden, wenn beide Merkmale X und Y mindestens ordinalskaliert sind.
  - Verfahren für kardinalskalierte Merkmale können nur dann eingesetzt werden, wenn beide Merkmale X und Y kardinalskaliert sind.
- Trotz unterschiedlicher Wertebereiche der Abhängigkeitsmaße besteht die Gemeinsamkeit, dass die Abhängigkeit von X und Y stets mit dem Wert 0 gemessen wird, falls X und Y unabhängig gemäß Definition 4.1 sind.
- *Vorsicht beim Ableiten von Kausalitätsbeziehungen (Wirkungsrichtungen) aus entdeckten Abhängigkeiten!*

Kardinalskalierte Merkmale

Definition 4.2 (emp. Kovarianz, Pearsonscher Korrelationskoeffizient)

Gegeben sei das zweidimensionale Merkmal (X, Y) mit der Urliste $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ der Länge n, X und Y seien kardinalskaliert. Mit $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ bzw. $\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$ seien wie üblich die arithmetischen Mittelwerte von X bzw. Y bezeichnet, mit

$$s_X = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2} \quad \text{bzw.} \quad s_Y = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}$$

die jeweiligen empirischen Standardabweichungen. Dann heißen

- $$s_{X,Y} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$$

  die **empirische Kovarianz** von X und Y und
- $$r_{X,Y} := \frac{s_{X,Y}}{s_X \cdot s_Y} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}}$$

  der **(Bravais-)Pearsonsche Korrelationskoeffizient** von X und Y.

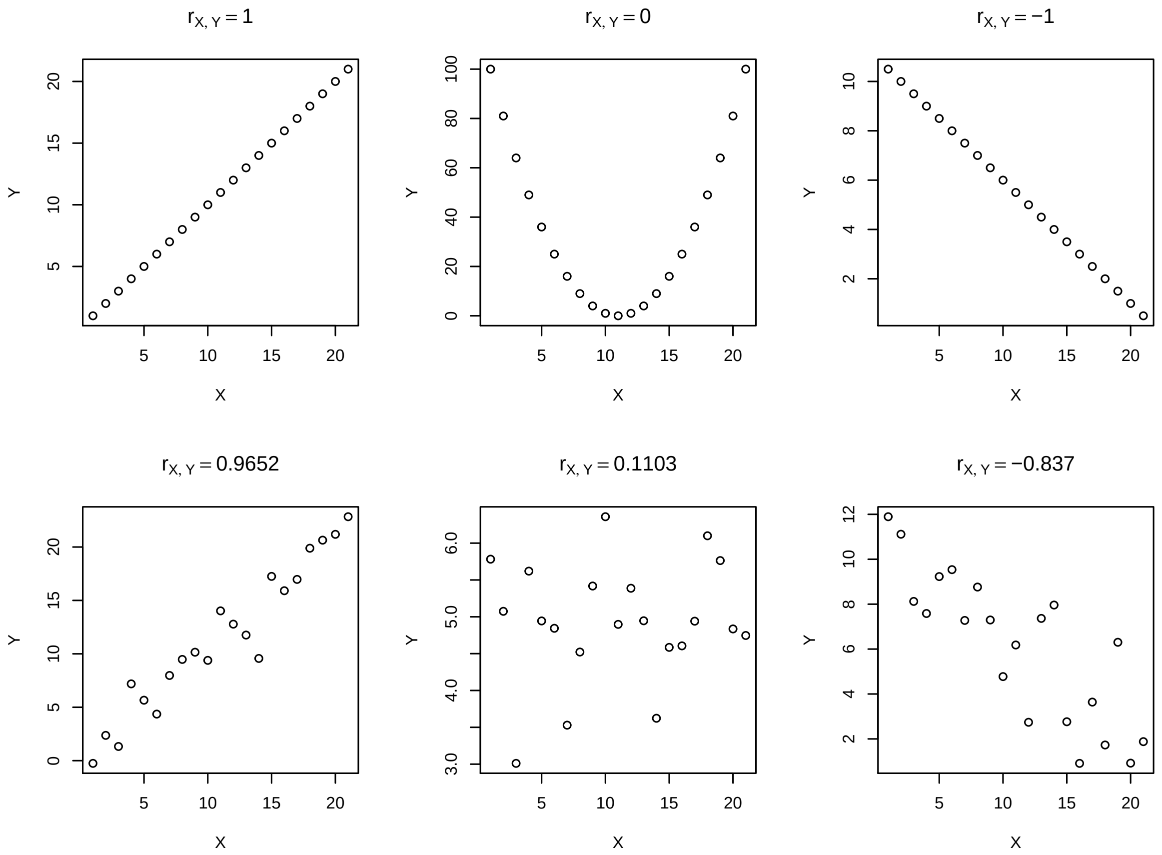
Bemerkungen I

- $s_{X,Y}$ kann meist einfacher gemäß $s_{X,Y} = \overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}$ mit
$$\overline{xy} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$$
berechnet werden.
- Bei Vorliegen der Häufigkeitsverteilung kann $\overline{xy}$ einfacher gemäß
$$\overline{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} a_i b_j \cdot h_{ij} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} a_i b_j \cdot r_{ij}$$
berechnet werden ($\overline{x}$ und $\overline{y}$ werden zur Berechnung von $s_{X,Y}$ dann zweckmäßigerweise ebenfalls mit Hilfe der Häufigkeitsverteilungen berechnet, siehe dazu Folie 67).

Bemerkungen II

- Es gilt **stets** $-1 \leq r_{X,Y} \leq 1$.
- $r_{X,Y}$ misst **lineare** Zusammenhänge, spezieller gilt
  - $r_{X,Y} > 0$ bei positiver „Steigung“ („X und Y sind **positiv korreliert**“),
  - $r_{X,Y} < 0$ bei negativer „Steigung“ („X und Y sind **negativ korreliert**“),
  - $|r_{X,Y}| = 1$, falls alle (x_i, y_i) auf einer Geraden (mit Steigung $\neq 0$) liegen.
- $r_{X,Y}$ ist nur definiert, wenn X und Y jeweils mindestens zwei verschiedene Merkmalsausprägungen besitzen.

Beispiel: Pearsonscher Korrelationskoeffizient



(Mindestens) ordinalskalierte Merkmale I

- Messen *linearer* Zusammenhänge bei Ordinalskala nicht (mehr) möglich, stattdessen: Messen *monotoner* Zusammenhänge.
- Hierzu für X und Y erforderlich: Bilden der **Ränge** der Merkmalswerte (gemäß der vorgegebenen Ordnung).
- Aus den Merkmalen X und Y mit Merkmalswerten $x_1, \ldots, x_n$ bzw. $y_1, \ldots, y_n$ werden dabei neue Merkmale $\mathrm{rg}(X)$ und $\mathrm{rg}(Y)$ mit Merkmalswerten $\mathrm{rg}(X)_1, \ldots, \mathrm{rg}(X)_n$ bzw. $\mathrm{rg}(Y)_1, \ldots, \mathrm{rg}(Y)_n$.
- Bilden der Ränge wird exemplarisch für Merkmal X beschrieben (Bilden der Ränge für Y ganz analog).

(Mindestens) ordinalskalierte Merkmale II

1. Einfacher Fall: *Alle n Merkmalswerte sind verschieden.*
   $\rightsquigarrow$ Ränge von 1 bis n werden den Merkmalswerten nach der Position in der gemäß der vorgegebenen Ordnung sortierten Urliste zugewiesen:
   $$x_{(1)} \mapsto 1, \ldots, x_{(n)} \mapsto n$$
2. Komplizierter Fall: Es existieren mehrfach auftretende Merkmalswerte (sog. *Bindungen*), d.h. es gilt $x_i = x_j$ für (mindestens) ein Paar (i, j) mit $i \neq j$.
   $\rightsquigarrow$ Prinzipielle Vorgehensweise wie im einfachen Fall, Ränge übereinstimmender Merkmalswerte müssen aber (arithmetisch) gemittelt werden.

(Mindestens) ordinalskalierte Merkmale III

- „Berechnungsvorschrift" für beide Fälle in folgender Definition:

Definition 4.3 (Rang eines Merkmals X, $\mathrm{rg}(X)_i$)

Gegeben sei ein Merkmal X mit Urliste $x_1, \ldots, x_n$. Dann heißt für $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$\begin{aligned}\mathrm{rg}(X)_i &:= \#\left\{j \in \{1, \ldots, n\} \,|\, x_j \leq x_i\right\} - \frac{\#\left\{j \in \{1, \ldots, n\} \,|\, x_j = x_i\right\} - 1}{2} \\ &= \sum_{\substack{a_j \leq x_i \\ 1 \leq j \leq m}} h(a_j) - \frac{h(x_i) - 1}{2} \\ &= n \cdot F(x_i) - \frac{h(x_i) - 1}{2}\end{aligned}$$

der **Rang** von x_i. Die Werte $\mathrm{rg}(X)_1, \ldots, \mathrm{rg}(X)_n$ können als Urliste zu einem neuen Merkmal $\mathrm{rg}(X)$ aufgefasst werden.

(Mindestens) ordinalskalierte Merkmale IV

- Der zweite (subtrahierte) Term $\frac{\#\{j\in\{1,\ldots,n\}\,|\,x_j=x_i\}-1}{2}$ bzw. $\frac{h(x_i)-1}{2}$ in Definition 4.3 dient der Berechnung des arithmetischen Mittels bei Vorliegen von Bindungen.
- Liegen keine Bindungen vor (sind also alle Merkmalswerte verschieden), ist der zweite (subtrahierte) Term in Definition 4.3 immer gleich 0.
- Idee zur Konstruktion eines Abhängigkeitsmaßes für (mindestens) ordinalskalierte zweidimensionale Merkmale (X, Y):
  1. Übergang von X zu $\mathrm{rg}(X)$ sowie von Y zu $\mathrm{rg}(Y)$
  2. Berechnung des Pearsonschen Korrelationskoeffizienten von $\mathrm{rg}(X)$ und $\mathrm{rg}(Y)$

Spearmanscher Rangkorrelationskoeffizient I

Definition 4.4 (Spearmanscher Rangkorrelationskoeffizient)

Gegeben sei das zweidimensionale Merkmal (X, Y) mit der Urliste $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ der Länge n, X und Y seien (mindestens) ordinalskaliert. Zu X und Y seien die Ränge $\mathrm{rg}(X)$ und $\mathrm{rg}(Y)$ gemäß Definition 4.3 gegeben. Dann heißt

$$r^{(S)}_{X,Y} := r_{\mathrm{rg}(X),\mathrm{rg}(Y)} = \frac{s_{\mathrm{rg}(X),\mathrm{rg}(Y)}}{s_{\mathrm{rg}(X)} \cdot s_{\mathrm{rg}(Y)}}$$

der **Spearmansche Rangkorrelationskoeffizient** von X und Y.

- Wegen des Zusammenhangs mit dem Pearsonschen Korrelationskoeffizienten gilt offensichtlich stets

$$-1 \leq r^{(S)}_{X,Y} \leq 1\ .$$

Spearmanscher Rangkorrelationskoeffizient II

- Bei der Berechnung von $r_{X,Y}^{(S)}$ kann die Eigenschaft

$$\overline{\text{rg}(X)} = \overline{\text{rg}(Y)} = \frac{n+1}{2}$$

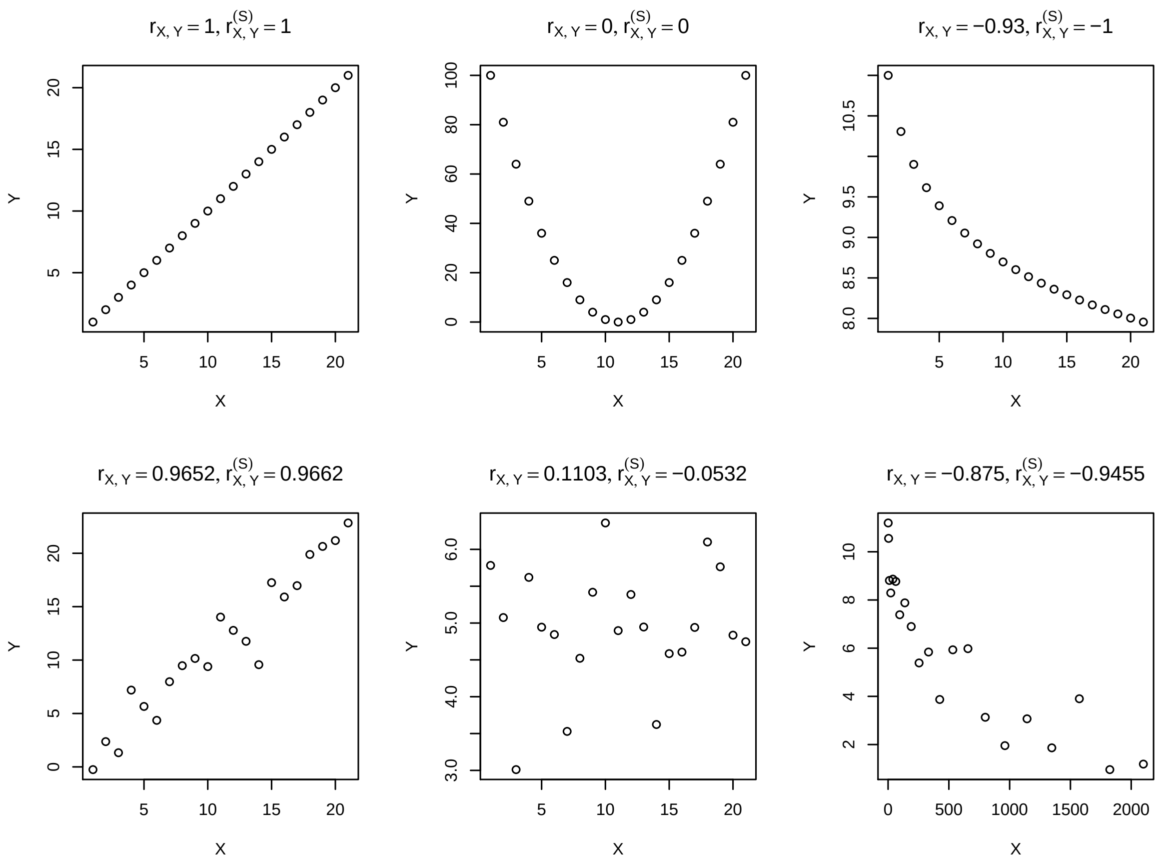
  ausgenutzt werden.
- Damit gilt für $r_{X,Y}^{(S)}$ stets:

$$r_{X,Y}^{(S)} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \text{rg}(X)_i \cdot \text{rg}(Y)_i - \frac{(n+1)^2}{4}}{\sqrt{\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\text{rg}(X)_i)^2 - \frac{(n+1)^2}{4}\right] \cdot \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\text{rg}(Y)_i)^2 - \frac{(n+1)^2}{4}\right]}}$$

- **Nur** wenn $x_i \neq x_j$ und $y_i \neq y_j$ für alle $i \neq j$ gilt (also **keine** Bindungen vorliegen), gilt die wesentlich leichter zu berechnende „Formel“

$$r_{X,Y}^{(S)} = 1 - \frac{6 \cdot \sum_{i=1}^{n}(\text{rg}(X)_i - \text{rg}(Y)_i)^2}{n \cdot (n^2 - 1)} \;.$$

Beispiel: Spearmanscher Rangkorrelationskoeffizient



(Mindestens) nominalskalierte Merkmale I

- Da bei nominalskalierten Merkmalen keine Ordnung vorgegeben ist, kann hier lediglich die *Stärke*, nicht aber die *Richtung* der Abhängigkeit zwischen X und Y gemessen werden.
- Idee zur Konstruktion eines Abhängigkeitsmaßes auf Basis der gemeinsamen Häufigkeitstabelle zu (X, Y):
  - Bei Unabhängigkeit der Merkmale X und Y müsste nach Definition 4.1 auf Folie 113

    $$h_{ij} = \frac{h_{i\cdot} \cdot h_{\cdot j}}{n} \qquad \text{für alle } i \in \{1, \dots, k\}, j \in \{1, \dots, l\}$$

    gelten.
  - Abweichungen zwischen h_{ij} und $\frac{h_{i\cdot} \cdot h_{\cdot j}}{n}$ können also zur Messung der Abhängigkeit eingesetzt werden.
- Hier verwendetes Abhängigkeitsmaß entsteht aus geeigneter Zusammenfassung und Normierung dieser Abweichungen.

(Mindestens) nominalskalierte Merkmale II

Definition 4.5 (Pearsonscher Kontingenzkoeffizient)

Gegeben sei das zweidimensionale Merkmal (X, Y) zu einer Urliste der Länge n mit den zugehörigen absoluten gemeinsamen Häufigkeiten h_{ij} sowie den Randhäufigkeiten $h_{i\cdot}$ und $h_{\cdot j}$ für $i \in \{1, \dots, k\}$, $j \in \{1, \dots, l\}$.
Dann heißt

$$C^{\text{korr}}_{X,Y} := \sqrt{\frac{\min\{k, l\}}{\min\{k, l\} - 1} \cdot \frac{\chi^2}{n + \chi^2}}$$

mit

$$\chi^2 := \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \frac{\left(h_{ij} - \frac{h_{i\cdot} \cdot h_{\cdot j}}{n}\right)^2}{\frac{h_{i\cdot} \cdot h_{\cdot j}}{n}}$$

korrigierter Pearsonscher Kontingenzkoeffizient der Merkmale X und Y.

- Es gilt stets $0 \leq C^{\text{korr}}_{X,Y} \leq 1$.