

## Diskrete Zufallsvariablen (Forts.) I

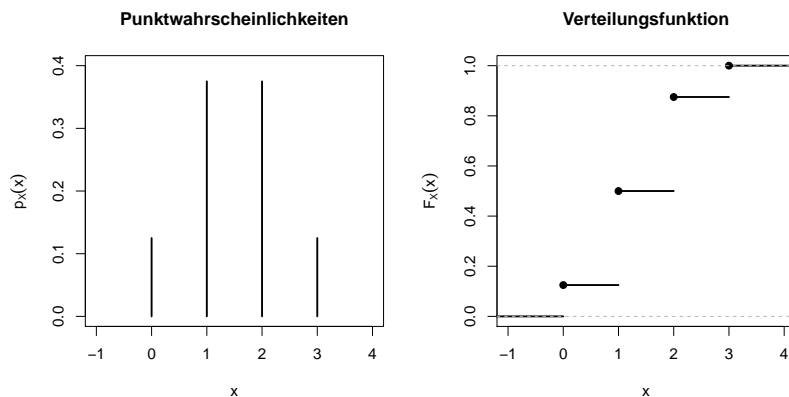
- $T(X)$  ist endlich oder abzählbar unendlich, die Elemente von  $T(X)$  werden daher im Folgenden häufig mit  $x_i$  bezeichnet (für  $i \in \{1, \dots, n\}$  bzw.  $i \in \mathbb{N}$ ), Summationen über Trägerpunkte mit dem Symbol  $\sum_{x_i}$ .
- Ist  $p_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die Wahrscheinlichkeitsfunktion einer diskreten Zufallsvariablen  $X$ , so gilt  $P_X(A) = \sum_{x_i \in A \cap T(X)} p_X(x_i)$  für alle  $A \in \mathcal{B}$ .
- Spezieller gilt für die Verteilungsfunktion  $F_X$  einer diskreten Zufallsvariablen

$$F_X(x) = \sum_{\substack{x_i \in T(X) \\ x_i \leq x}} p_X(x_i) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Verteilungsfunktionen diskreter Zufallsvariablen sind damit (vergleichbar mit empirischen Verteilungsfunktionen) Treppenfunktionen mit **Sprunghöhen**  $p_X(x_i)$  an den **Sprungstellen** (=Trägerpunkten)  $x_i \in T(X)$ .

## Diskrete Zufallsvariablen (Forts.) III

- *Grafische Darstellung im Münzwurf-Beispiel:*



## Diskrete Zufallsvariablen (Forts.) II

- *Im Münzwurf-Beispiel:*

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ \frac{1}{8} & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{für } 1 \leq x < 2 \\ \frac{7}{8} & \text{für } 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{für } x \geq 3 \end{cases}$$

- Ist der Träger  $T(X)$  endlich und die Anzahl der Elemente in  $T(X)$  klein, so werden die Punktwahrscheinlichkeiten häufig in Tabellenform angegeben.
- *Im Münzwurf-Beispiel:*

$x_i$	0	1	2	3
$p_X(x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

## Stetige Zufallsvariablen I

- Weiterer wichtiger Spezialfall: **stetige** Zufallsvariablen
- Wertebereich stetiger Zufallsvariablen ist immer ein Kontinuum: es gibt **keine** endliche oder abzählbar unendliche Menge  $B \subseteq \mathbb{R}$  mit  $P_X(B) = 1$ , stattdessen gilt sogar  $P_X(B) = 0$  für alle endlichen oder abzählbar unendlichen Teilmengen  $B \subseteq \mathbb{R}$ .
- Verteilungsfunktionen stetiger Zufallsvariablen sind nicht (wie bei diskreten Zufallsvariablen) als Summe von Wahrscheinlichkeitsfunktionswerten darstellbar, sondern als Integral über eine sogenannte *Dichtefunktion*:

## Stetige Zufallsvariablen II

### Definition 9.4 (Stetige Zufallsvariable, Dichtefunktion)

Seien  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $X$  eine Zufallsvariable über  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Gibt es eine nichtnegative Abbildung  $f_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

so heißt die Zufallsvariable  $X$  **stetig**. Jede nichtnegative Abbildung  $f_X$  mit der Eigenschaft (2) heißt **Dichtefunktion** von  $X$ .

## Stetige Zufallsvariablen IV

- Dichtefunktion  $f_X$  zu einer Verteilungsfunktion  $F_X$  ist nicht eindeutig bestimmt; Abänderungen von  $f_X$  an endlich oder abzählbar unendlich vielen Stellen sind beliebig möglich!
- **Aber:** Ist  $f_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  nichtnegative uneigentlich integrierbare Abbildung mit  $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1$ , so gibt es genau eine Verteilungsfunktion  $F_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , zu der  $f_X$  Dichtefunktion ist.
- Neben diskreten und stetigen Zufallsvariablen sind auch Mischformen (mit einem diskreten und stetigen Anteil) möglich, auf die hier aber nicht näher eingegangen wird!

## Stetige Zufallsvariablen III

- Aus Definition 9.4 lassen sich weitere Eigenschaften von stetigen Zufallsvariablen bzw. Dichtefunktionen ableiten, zum Beispiel:
  - ▶  $P_X(\{x\}) = 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ .
  - ▶  $F_X(x-0) = F_X(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ ,  $F_X$  ist also stetig auf  $\mathbb{R}$ .
  - ▶  $P(\{a \leq X \leq b\}) = P(\{a < X \leq b\}) = P(\{a \leq X < b\}) = P(\{a < X < b\}) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(t) dt$  für alle  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a \leq b$ .
  - ▶ (Mindestens) in allen Stetigkeitsstellen  $x \in \mathbb{R}$  von  $f_X$  ist  $F_X$  differenzierbar und es gilt  $F_X'(x) = f_X(x)$ .
- Wahrscheinlichkeit von Intervallen stimmt mit Fläche zwischen Intervall und Dichtefunktion (analog zu Histogrammen bei deskriptiver Statistik mit klassierten Daten) überein.

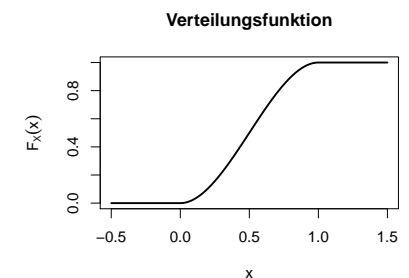
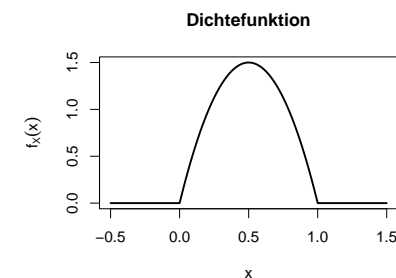
- **Beispiel:** Die Abbildung

$$f_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f_X(x) := \begin{cases} 6(x - x^2) & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist nichtnegativ und uneigentlich integrierbar mit  $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1$ , also eine Dichtefunktion.

- Die Verteilungsfunktion  $F_X$  zu  $f_X$  erhält man als

$$F_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 3x^2 - 2x^3 & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{für } x > 1 \end{cases} .$$



## (Lineare) Abbildungen von Zufallsvariablen I

- Genauso, wie man mit Hilfe einer  $\mathcal{F}$ - $\mathcal{B}$ -messbaren Abbildung  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  als Zufallsvariable über einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  einen neuen Wahrscheinlichkeitsraum  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$  erhält, kann aus diesem mit einer „nachgeschalteten“  $\mathcal{B}$ - $\mathcal{B}$ -messbaren Abbildung  $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ein weiterer Wahrscheinlichkeitsraum gewonnen werden!
- Mehrere „Auffassungen“ möglich:
  - 1  $G$  als Zufallsvariable über  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$  durch

$$(P_X)_G(B) = P_X(G^{-1}(B)) \text{ für alle } B \in \mathcal{B}.$$

- 2  $G(X) := G \circ X$  als Zufallsvariable über  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  durch

$$P_{G(X)}(B) = P((G \circ X)^{-1}(B)) = P(X^{-1}(G^{-1}(B))) \text{ für alle } B \in \mathcal{B}.$$

- Man erkennt leicht, dass beide Auffassungen miteinander vereinbar sind (es gilt  $(P_X)_G = P_{G(X)}$ ), daher Schreibweise  $G(X)$  auch geläufig, wenn  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  nicht im Vordergrund steht.

### Satz 9.5

Es seien  $X$  eine (eindimensionale) Zufallsvariable,  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a \neq 0$  und  $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die Abbildung mit  $G(x) = ax + b$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Dann ist  $Y := G(X) = aX + b$  ebenfalls eine Zufallsvariable und es gilt

$$F_Y(y) = \begin{cases} F_X\left(\frac{y-b}{a}\right) & \text{für } a > 0 \\ 1 - F_X\left(\frac{y-b}{a}\right) - 0 & \text{für } a < 0 \end{cases} \text{ für alle } y \in \mathbb{R}.$$

- Ist  $X$  diskret und  $p_X$  die Wahrscheinlichkeitsfunktion von  $X$ , so ist auch  $Y$  diskret und die Wahrscheinlichkeitsfunktion  $p_Y$  von  $Y$  gegeben durch:

$$p_Y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; p_Y(y) = p_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

- Ist  $X$  stetig und  $f_X$  eine Dichtefunktion von  $X$ , so ist auch  $Y$  stetig und

$$f_Y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f_Y(y) := \frac{1}{|a|} \cdot f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

eine Dichtefunktion zu  $Y$ .

## (Lineare) Abbildungen von Zufallsvariablen II

- Im Folgenden: Betrachtung besonders einfacher (linearer) Abbildungen  $G$ , also Abbildungen der Form  $G(x) = a \cdot x + b$  für  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a \neq 0$ .
- Man kann zeigen, dass  $G$  (als stetige Funktion) stets  $\mathcal{B}$ - $\mathcal{B}$ -messbar ist.
- **Problemstellung:** Wie kann die Verteilung von  $Y := G(X)$  (möglichst leicht!) aus der Verteilung von  $X$  gewonnen werden?
- **Idee:** Abbildung  $G$  ist insbesondere bijektiv, es existiert also die **Umkehrfunktion**  $G^{-1}(y) = \frac{y-b}{a}$ .
- Für diskrete Zufallsvariablen  $X$  mit Trägerpunkten  $x_i$  und zugehöriger Wahrscheinlichkeitsfunktion  $p_X$  ist offensichtlich auch  $Y$  diskret mit
  - ▶ Trägerpunkten  $y_i = a \cdot x_i + b$  und
  - ▶ Wahrscheinlichkeitsfunktion  $p_Y(y) = P_Y(\{y\}) = P_X(\{\frac{y-b}{a}\}) = p_X(\frac{y-b}{a})$ .
 (Es gilt also  $p_i = p_X(x_i) = p_Y(a \cdot x_i + b) = p_Y(y_i)$ )
- Ähnlich lassen sich zu  $Y = G(X)$  auch Dichtefunktionen  $f_Y$  (bei stetigen Zufallsvariablen  $X$ ) aus  $f_X$  sowie (allgemein) Verteilungsfunktionen  $F_Y$  aus  $F_X$  bestimmen:

## Erwartungswert von Zufallsvariablen I

- Analog zur Lage- und Streuungsmaßen in deskriptiver Statistik: Oft Verdichtung der Information aus Verteilungen von Zufallsvariablen auf eine oder wenige Kennzahlen erforderlich.
- Kennzahl für **Lage** der Verteilung: **Erwartungswert**
- Zur allgemeinen Definition „zuviel“ Maß- und Integrationstheorie erforderlich, daher Beschränkung auf diskrete und stetige Zufallsvariablen (separat).
- In deskriptiver Statistik: Arithmetischer Mittelwert eines Merkmals als (mit den relativen Häufigkeiten) gewichtetes Mittel der aufgetretenen Merkmalswerte.
- Bei diskreten Zufallsvariablen analog: Erwartungswert als (mit den Punktwahrscheinlichkeiten) gewichtetes Mittel der Trägerpunkte.

## Erwartungswert von Zufallsvariablen II

### Definition 9.6 (Erwartungswerte diskreter Zufallsvariablen)

Es sei  $X$  eine diskrete Zufallsvariable mit Trägerpunkten  $x_i$  und Wahrscheinlichkeitsfunktion  $p_X$ . Gilt

$$\sum_{x_i} |x_i| \cdot p_X(x_i) < \infty, \quad (3)$$

so heißt

$$\mu_X := E X := E(X) := \sum_{x_i} x_i \cdot p_X(x_i)$$

der **Erwartungswert (Mittelwert)** der Zufallsvariablen  $X$ .  
Gilt (3) nicht, so sagt man, der Erwartungswert von  $X$  existiere nicht.

## Erwartungswert von Zufallsvariablen IV

### Definition 9.7 (Erwartungswerte stetiger Zufallsvariablen)

Es sei  $X$  eine stetige Zufallsvariable und  $f_X$  eine Dichtefunktion von  $X$ . Gilt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| \cdot f_X(x) dx < \infty, \quad (4)$$

so heißt

$$\mu_X := E X := E(X) := \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x) dx$$

der **Erwartungswert (Mittelwert)** der Zufallsvariablen  $X$ .  
Gilt (4) nicht, so sagt man, der Erwartungswert von  $X$  existiere nicht.

## Erwartungswert von Zufallsvariablen III

- Anders als in deskriptiver Statistik: Erwartungswert einer Zufallsvariablen existiert möglicherweise nicht!
- Existenzbedingungen sind zwar (auch in anderen Definitionen) angeführt, bei den hier betrachteten Zufallsvariablen sind diese aber stets erfüllt.
- Ist der Träger  $T(X)$  einer diskreten Zufallsvariablen  $X$  endlich, so existiert  $E(X)$  stets (Summe endlich).
- Gilt spezieller  $T(X) = \{a\}$  für ein  $a \in \mathbb{R}$ , d.h. gilt  $p_X(a) = 1$  und  $p_X(x) = 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  mit  $x \neq a$ , dann nennt man die Verteilung von  $X$  eine **Einpunktverteilung** und es gilt offensichtlich  $E(X) = a$ .
- Für stetige Zufallsvariablen ist die Summation durch ein Integral, die Wahrscheinlichkeitsfunktion durch eine Dichtefunktion und die Trägerpunkte durch die Integrationsvariable zu ersetzen:

## Symmetrie

### Definition 9.8 (Symmetrische Zufallsvariablen)

Eine Zufallsvariable  $X$  über einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  heißt **symmetrisch** um  $a \in \mathbb{R}$ , falls die Verteilungen von  $X - a$  und  $a - X$  übereinstimmen.

- Alternative (äquivalente) Bedingungen
  - ▶ für beliebige Zufallsvariablen  $X$ :  
 $P_X(X \leq a + x) = P_X(X \geq a - x)$  bzw.  $F_X(a + x) = 1 - F_X(a - x - 0)$   
für alle  $x \in \mathbb{R}$ .
  - ▶ für diskrete Zufallsvariablen  $X$ :  
Für alle  $x_i \in T(X)$  gilt  $2a - x_i \in T(X)$  und spezieller  $p_X(x_i) = p_X(2a - x_i)$ .
  - ▶ für stetige Zufallsvariablen  $X$ :  
Es existiert eine Dichte  $f_X$  von  $X$  mit  
 $f_X(a + x) = f_X(a - x)$  bzw.  $f_X(x) = f_X(2a - x)$   
für alle  $x \in \mathbb{R}$ .
- Existiert der Erwartungswert  $E(X)$  von  $X$  und ist  $X$  symmetrisch um  $a \in \mathbb{R}$ , dann gilt stets  $a = E(X)$ .

## Erwartungswert von $G(X)$

- Zur Einführung weiterer Kennzahlen für Verteilung einer Zufallsvariablen  $X$  nötig: Erwartungswerte von Transformationen  $G(X)$  für verschiedene (nicht nur lineare)  $\mathcal{B} - \mathcal{B}$ -messbare Abbildungen  $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

### Definition 9.9

Es seien  $X$  eine Zufallsvariable und  $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $\mathcal{B} - \mathcal{B}$ -messbare Abbildung.

- Ist  $X$  diskrete Zufallsvariable,  $x_i$  die Trägerpunkte sowie  $p_X$  die Wahrscheinlichkeitsfunktion von  $X$  und gilt  $\sum_{x_i} |G(x_i)| \cdot p_X(x_i) < \infty$ , dann existiert der Erwartungswert  $E(G(X))$  und es gilt

$$E(G(X)) = \sum_{x_i} G(x_i) \cdot p_X(x_i).$$

- Ist  $X$  stetige Zufallsvariable mit Dichtefunktion  $f_X$  und gilt  $\int_{-\infty}^{+\infty} |G(x)| \cdot f_X(x) dx < \infty$ , dann existiert der Erwartungswert  $E(G(X))$  und es gilt

$$E(G(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x) \cdot f_X(x) dx.$$

## Rechenregeln für Erwartungswerte und Varianz I

### Satz 9.11

Es seien  $X$  eine (eindimensionale) Zufallsvariable,  $a, b \in \mathbb{R}$ .

- Existiert  $E(X)$ , so existiert auch der Erwartungswert von  $aX + b$  und es gilt:

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

- Existiert  $\text{Var}(X)$ , so existiert auch die Varianz von  $aX + b$  und es gilt:

$$\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$$

### Satz 9.12 (Varianzzerlegungssatz)

Es sei  $X$  eine (eindimensionale) Zufallsvariable. Dann existiert die Varianz  $\text{Var}(X)$  genau dann, wenn  $E(X^2)$  (und  $E(X)$ ) existiert, und in diesem Fall gilt:

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

## Höhere Momente von Zufallsvariablen

### Definition 9.10 ( $k$ -te Momente, Varianz, Standardabweichung)

Es seien  $X$  eine (eindimensionale) Zufallsvariable,  $k \in \mathbb{N}$ .

- Man bezeichnet den Erwartungswert  $E(X^k)$  (falls er existiert) als das **Moment  $k$ -ter Ordnung (um Null)** von  $X$  und schreibt

$$m_k := m_k(X) := E(X^k).$$

- Existiert  $E(X)$ , so bezeichnet man den Erwartungswert  $E[(X - E(X))^k]$  (falls er existiert) als das **zentrale Moment  $k$ -ter Ordnung** von  $X$  und schreibt

$$\mu_k := \mu_k(X) := E[(X - E(X))^k].$$

- Das zweite zentrale Moment  $\mu_2(X)$  heißt auch **Varianz** von  $X$ , und man schreibt  $\sigma_X^2 := \text{Var}(X) := \mu_2(X)$ .
- Die positive Wurzel der Varianz von  $X$  heißt auch **Standardabweichung** von  $X$ , und man schreibt  $\sigma_X := \text{Sd}(X) := +\sqrt{\sigma_X^2}$ .

## Rechenregeln für Erwartungswerte und Varianz II

- Die Eigenschaft aus Satz 9.11, den „Erwartungswertoperator“  $E(\cdot)$  mit linearen Abbildungen vertauschen zu dürfen, lässt sich zum Beispiel wie folgt verallgemeinern:

Es seien  $X$  eine (eindimensionale) Zufallsvariable,  $a, b \in \mathbb{R}$  sowie  $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zwei  $\mathcal{B} - \mathcal{B}$ -messbare Abbildungen. Existieren  $E(G(X))$  und  $E(H(X))$ , dann gilt:

$$E(aG(X) + bH(X)) = aE(G(X)) + bE(H(X))$$

## Rechenregeln für Erwartungswerte und Varianz III

- Mit Satz 9.11 folgt direkt:

Ist  $X$  eine Zufallsvariable mit existierendem Erwartungswert  $E(X)$  und existierender Varianz  $\text{Var}(X)$ , so erhält man mit

$$Y := \frac{X - E(X)}{\sqrt{\text{Var}(X)}}$$

eine neue Zufallsvariable mit  $E(Y) = 0$  und  $\text{Var}(Y) = 1$ .  
Man nennt  $Y$  dann eine **standardisierte Zufallsvariable**.

## Schiefe und Wölbung von Zufallsvariablen II

- Ist  $X$  symmetrisch, so ist die Schiefe von  $X$  (falls sie existiert) gleich Null. Die Umkehrung der Aussage gilt **nicht**.
- Existieren Schiefe bzw. Kurtosis einer Zufallsvariablen  $X$ , so existieren auch die Schiefe bzw. Kurtosis von  $Y := aX + b$  für  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a \neq 0$  und es gilt:
  - ▶  $\gamma_X = \gamma_Y$  sowie  $\kappa_X = \kappa_Y$ , falls  $a > 0$ ,
  - ▶  $\gamma_X = -\gamma_Y$  sowie  $\kappa_X = \kappa_Y$ , falls  $a < 0$ .
- In Abhängigkeit von  $\gamma_X$  heißt die Verteilung von  $X$ 
  - ▶ **linkssteil** oder **rechtsschief**, falls  $\gamma_X > 0$  gilt und
  - ▶ **rechtssteil** oder **linksschief**, falls  $\gamma_X < 0$  gilt.

## Schiefe und Wölbung von Zufallsvariablen I

### Definition 9.13 (Schiefe (Skewness), Wölbung (Kurtosis))

Sei  $X$  eine (eindimensionale) Zufallsvariable mit existierender Varianz  $\sigma_X^2 > 0$ .

- 1 Existiert das zentrale Moment 3. Ordnung  $\mu_3(X)$ , so nennt man

$$\gamma_X := \gamma(X) := \frac{\mu_3(X)}{\sigma_X^3}$$

die **Schiefe (Skewness)** von  $X$ .

- 2 Existiert das zentrale Moment 4. Ordnung  $\mu_4(X)$ , so nennt man

$$\kappa_X := \kappa(X) := \frac{\mu_4(X)}{\sigma_X^4}$$

die **Wölbung (Kurtosis)** von  $X$ .

Die um 3 verminderte Kurtosis  $\kappa_X - 3$  wird auch **Exzess-Kurtosis** genannt.

## Schiefe und Wölbung von Zufallsvariablen III

- In Abhängigkeit von  $\kappa_X$  heißt die Verteilung von  $X$ 
  - ▶ **platykurtisch** oder **flachgipflig**, falls  $\kappa_X < 3$  gilt,
  - ▶ **mesokurtisch** oder **normalgipflig**, falls  $\kappa_X = 3$  gilt und
  - ▶ **leptokurtisch** oder **steilgipflig**, falls  $\kappa_X > 3$  gilt.
- $\gamma_X$  und  $\kappa_X$  können (auch wenn sie existieren) nicht beliebige Werte annehmen. Es gilt stets  $\kappa_X \geq 1$  und  $\gamma_X^2 \leq \kappa_X - 1$ .
- Man kann (zur einfacheren Berechnung von  $\gamma_X$  und  $\kappa_X$ ) leicht zeigen:
  - ▶  $\mu_3(X) = E(X^3) - 3E(X^2)E(X) + 2[E(X)]^3 = E(X^3) - 3E(X)\sigma_X^2 - [E(X)]^3$
  - ▶  $\mu_4(X) = E(X^4) - 4E(X^3)E(X) + 6E(X^2)[E(X)]^2 - 3[E(X)]^4$   
 $= E(X^4) - 4E(X^3)E(X) + 6[E(X)]^2\sigma_X^2 + 3[E(X)]^4$

## Beispiel

zu stetiger Zufallsvariable  $X$  aus Folie 208 mit Dichte  $f_X(x) = \begin{cases} 6(x-x^2) & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ .

$$\bullet E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x) dx = \int_0^1 (6x^2 - 6x^3) dx = \left[ 2x^3 - \frac{3}{2}x^4 \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\bullet E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f_X(x) dx = \int_0^1 (6x^3 - 6x^4) dx = \left[ \frac{3}{2}x^4 - \frac{6}{5}x^5 \right]_0^1 = \frac{3}{10}$$

$$\Rightarrow \text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{3}{10} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{20}$$

$$\bullet E(X^3) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 \cdot f_X(x) dx = \int_0^1 (6x^4 - 6x^5) dx = \left[ \frac{6}{5}x^5 - x^6 \right]_0^1 = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \gamma(X) = \frac{\frac{1}{5} - 3 \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3}{(1/20)^{3/2}} = \frac{4-9+5}{20} = 0$$

$$\bullet E(X^4) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 \cdot f_X(x) dx = \int_0^1 (6x^5 - 6x^6) dx = \left[ x^6 - \frac{6}{7}x^7 \right]_0^1 = \frac{1}{7}$$

$$\Rightarrow \kappa(X) = \frac{\frac{1}{7} - 4 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} + 6 \cdot \frac{3}{10} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4}{(1/20)^2} = \frac{3/560}{1/400} = \frac{15}{7}$$

## Quantile von Zufallsvariablen II

- $p$ -Quantile sind nach Definition 9.14 eindeutig bestimmt, wenn die Verteilungsfunktion  $F_X$  der Zufallsvariablen  $X$  (dort, wo sie Werte in  $(0,1)$  annimmt) invertierbar ist, also insbesondere stetig und streng monoton wachsend.

Bezeichnet  $F_X^{-1}$  die Umkehrfunktion von  $F_X$ , so gilt dann

$$x_p = F_X^{-1}(p) \quad \text{für alle } p \in (0,1).$$

- Der Abstand  $x_{0.75} - x_{0.25}$  zwischen unterem und oberem Quartil wird (wie auch bei empirischen Quartilen) auch **Interquartilsabstand (IQA)** genannt.

## Quantile von Zufallsvariablen I

### Definition 9.14 ( $p$ -Quantil)

Seien  $X$  eine eindimensionale Zufallsvariable,  $p \in (0,1)$ . Jeder Wert  $x_p \in \mathbb{R}$  mit

$$P\{X \leq x_p\} \geq p \quad \text{und} \quad P\{X \geq x_p\} \geq 1 - p$$

heißt  **$p$ -Quantil** (auch  **$p$ -Perzentil**) von  $X$ . Man nennt Werte  $x_p$  mit dieser Eigenschaft spezieller

- Median** von  $X$  für  $p = 0.5$ ,
- unteres Quartil** von  $X$  für  $p = 0.25$  sowie
- oberes Quartil** von  $X$  für  $p = 0.75$ .

Ist  $F_X$  die Verteilungsfunktion von  $X$ , so ist  $x_p$  also genau dann  $p$ -Quantil von  $X$ , wenn

$$F_X(x_p - 0) \leq p \leq F_X(x_p)$$

gilt, für stetige Zufallsvariablen  $X$  also genau dann, wenn  $F_X(x_p) = p$  gilt.

## Quantile von Zufallsvariablen III

- Auch ohne die Invertierbarkeit von  $F_X$  kann Eindeutigkeit von Quantilen zum Beispiel durch die Festsetzung

$$x_p := \min\{x \mid P\{X \leq x\} \geq p\} = \min\{x \mid F_X(x) \geq p\}$$

erreicht werden.

Man nennt die Abbildung

$$(0,1) \rightarrow \mathbb{R}; p \mapsto x_p = \min\{x \mid F_X(x) \geq p\}$$

häufig auch *verallgemeinerte Inverse* von  $F_X$  und verwendet hierfür dann ebenfalls das Symbol  $F_X^{-1}$ .

- Diese Eindeutigkeitsfestlegung **unterscheidet** sich von der vergleichbaren Konvention aus der deskriptiven Statistik für empirische Quantile!