

12. Übungsblatt zur Vorlesung
Deskriptive Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung SS 2016

Aufgabe 56

Gegeben sei die (bereits um die Randwahrscheinlichkeiten ergänzte) gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung des diskreten zweidimensionalen Zufallsvektors (X, Y) aus Aufgabe 54 wie folgt:

Y X	1	2	3	$p_{i\cdot}$
1	0.02	0.13	0.15	0.30
2	0.16	0.20	0.14	0.50
3	0.12	0.04	0.04	0.20
$p_{\cdot j}$	0.30	0.37	0.33	1

- (a) Geben Sie die bedingten Wahrscheinlichkeitsverteilungen von X unter der Bedingung $Y = y_j$ für alle $y_j \in T(Y)$ über die zugehörigen (bedingten) Wahrscheinlichkeitsfunktionen an.
- (b) Sind X und Y stochastisch unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort mit den Resultaten aus Teil (a)!

Aufgabe 57

Der zweidimensionale Zufallsvektor (X, Y) habe die folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:

Y X	3	4	5
1	1/6	0	1/6
2	1/12	1/3	0
3	0	1/6	1/12

- (a) Berechnen Sie die Erwartungswerte $E(X)$ und $E(Y)$ sowie die Varianzen $\text{Var}(X)$ und $\text{Var}(Y)$.
- (b) Berechnen Sie die Kovarianz $\text{Cov}(X, Y)$ und den Korrelationskoeffizienten $\text{Korr}(X, Y)$.

Aufgabe 58

Der zweidimensionale Zufallsvektor (X, Y) besitze die folgende gemeinsame Dichtefunktion:

$$f_{(X,Y)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} y - x + 1 & \text{für } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- (a) Bestimmen Sie eine Randdichte f_X von X sowie eine Randdichte f_Y von Y .
- (b) Vergleichen Sie das Produkt der beiden Randdichten mit der angegebenen gemeinsamen Dichtefunktion. Sind X und Y stochastisch unabhängig?
- (c) Geben Sie für $0 \leq y \leq 1$ bedingte Dichtefunktionen $f_{X|Y=y}$ von X gegeben $Y = y$ an.
- (d) Berechnen Sie die Erwartungswerte und Varianzen von X und Y .
- (e) Berechnen Sie die Kovarianz sowie den Korrelationskoeffizienten von X und Y .

Aufgabe 59

Gegeben sei ein zweidimensionaler Zufallsvektor (X, Y) mit $X \sim N(4, 2^2)$ und $Y \sim \text{Exp}(0.5)$, das heißt, die Randverteilungen von X bzw. Y seien eine Normalverteilung mit Parametern $\mu_X = 4$ und $\sigma_X^2 = 2^2$ bzw. eine Exponentialverteilung mit Parameter $\lambda_Y = 0.5$.

- (a) In welchem Bereich muss die Kovarianz $\text{Cov}(X, Y)$ liegen?
- (b) Es sei nun bekannt, dass $\text{Korr}(X, Y) = 0.5$ gilt. Berechnen Sie:
 - (i) $\text{Cov}(4X, -2Y)$,
 - (ii) $E(4X - 2Y + 2)$,
 - (iii) $\text{Var}(4X - 2Y + 2)$.
- (c) Bestimmen Sie den Erwartungswert von $4X^2 - 4Y^2$.